Formule de Taylor

A. L'idée de départ.

A-I. Approximation d'une fonction par un polynôme

On sait que lorsqu'une fonction f est continue en x_0, sa valeur ne varie pas « brutalement » autour de x_0 autrement dit : pour x voisin de x_0, on a $f(x)$ voisin de $f(x_0)$ ce qu'on écrit souvent (même si c'est imprécis) : pour x voisin de x_0, on a $f(x) \cong f(x_0)$.

On sait aussi que lorsqu'une fonction f est dérivable en x_0, l'utilisation de la dérivée permet de prévoir l'évolution de l'image pour des valeurs de x proches de x_0 ce qu'on écrit souvent (même si c'est imprécis) : pour x voisin de x_0, on a $f(x) \cong f(x_0) + (x - x_0).f'(x_0)$.

L'idée est alors de continuer à améliorer l'approximation de $f(x)$ en utilisant les dérivées successives de f en x_0 …

Plutôt que de travailler au voisinage de x_0, on peut se contenter de travailler au voisinage de 0 (cela revient juste à faire un changement de variable) et, dans ces conditions, Taylor (**TAYLOR Brook, anglais, 1685-1731**) a « deviné » la formule suivante :

$$f(x) \cong f(0) + x.\frac{f'(0)}{1!} + x^2.\frac{f''(0)}{2!} + x^3.\frac{f'''(0)}{3!} + ... + x^n.\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Cela suppose bien entendu que la fonction soit dérivable n fois de suite en 0 ! Cette formule n'a pas été démontrée par Taylor parce qu'elle est imprécise du fait qu'il ne s'agit pas d'une égalité. Lagrange (LAGRANGE Joseph Louis, Comte de-, français, 1736-1813) environ 100 ans après Taylor a exprimé le terme d'erreur qui permet de transformer l'égalité approximative en une vraie égalité. Ce terme d'erreur peut s'exprimer de différentes façons… nous n'entrerons pas dans le détail de ces expressions.

B. Formule de Taylor

B-I. Enoncé de Taylor pour les développements limités

La formule de Taylor, dite aussi de Taylor-Lagrange, est en fait l'aboutissement de travaux déjà entamés par Gregory, Newton, Leibniz et Jacques Bernoulli.

On démontre et nous admettons que si une fonction f est définie dans un intervalle autour de 0 et possède n dérivées successives en 0, on peut trouver une fonction ε telle que $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ vérifiant :

$$f(x) = f(0) + x.\frac{f'(0)}{1!} + x^2.\frac{f''(0)}{2!} + x^3.\frac{f'''(0)}{3!} + ... + x^n.\frac{f^{(n)}(0)}{n!} + x^n.\varepsilon(x)$$

Vocabulaire : Dans la formule de Taylor, $f(0) + x.\frac{f'(0)}{1!} + x^2.\frac{f''(0)}{2!} + x^3.\frac{f'''(0)}{3!} + ... + x^n.\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ est appelée **partie régulière** du développement, et $x^n.\varepsilon(x)$ est appelé **reste d'Young** du développement. Le développement formé de la partie régulière et du reste est appelé développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 et dans ce cours on écrit en abrégé DLn.

B-II. Intérêt de la formule de Taylor

La formule de Taylor permet, si on néglige le reste, de remplacer une fonction « quelconque » par un polynôme et on sait calculer beaucoup plus simplement et plus rapidement avec les polynômes qu'avec toute autre fonction. En particulier, les calculs d'images se font rapidement grâce au schéma de HORNER et les calculs de dérivées se font sans utiliser la notion de limite puisque $\left[x^n\right]' = n.x^{n-1}$

B-III. Développements limités usuels : exercices immédiats :

Démontrer que, au voisinage de 0 on a les développements suivants :

1) $e^x = 1 + \dfrac{x^1}{1} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + x^n.\varepsilon(x)$

2) $\sin(x) = \dfrac{x^1}{1} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + ... + (-1)^p \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2}.\varepsilon(x)$

3) $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + ... + (-1)^p \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1}.\varepsilon(x)$

4) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} + x^n.\varepsilon(x)$

5) $\mathrm{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + ... + \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1}.\varepsilon(x)$

6) $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{x^1}{1} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + ... + \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2}.\varepsilon(x)$

7) $(1+x)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha x}{1!} + \dfrac{\alpha(\alpha-1).x^2}{2!} + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).x^3}{6} + ... + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1).x^n}{n!} + x^n.\varepsilon(x)$

B-IV. Propriétés admises… et si possible comprises !

- Le DLn d'une fonction paire ne contient que des exposants pairs.
- Le DLn d'une fonction impaire ne contient que des exposants impairs.
- La partie régulière du DLn d'une somme de fonctions s'obtient en additionnant les parties régulières des DLn de ces fonctions.
- La partie régulière du DLn d'un produit de fonctions s'obtient en effectuant le produit des parties régulières des DLn de ces fonctions et en tronquant le produit au degré n.
- La partie régulière du DLn d'un quotient de fonctions (le diviseur commençant par une constante) s'obtient en effectuant le quotient suivant les puissances croissantes des parties régulières des DLn de ces fonctions et en tronquant le quotient dès que le reste est d'un degré supérieur à n.
- Si on connaît un DLn de $f(x)$ au voisinage de 0 et si $f'(x)$ possède un DL(n-1) celui ci s'obtient en dérivant terme à terme le DLn de $f(x)$.
- Si on connaît un DLn de $f'(x)$ au voisinage de 0 alors $f(x)$ possède un DL(n+1) qui s'obtient en faisant suivre la constante f(0) par les termes obtenus en intégrant ceux du DLn de $f'(x)$.
- On appelle DLn de $f(x)$ au voisinage de x_0 le DLn de $f(x_0+h)$ au voisinage de 0.
- Si $f(x)$ possède un Dln au voisinage de 0 et si $g(x)$ possède un DLn au voisinage de alors $g(f(x))$ possède un DLn au voisinage de 0 obtenu en composant les parties régulières et en tronquant le résultat au degré n.

B-V. Exemples d'applications traités en cours

Ces exercices supposent qu'on connaît les développements classiques vus au BIII… ou qu'on a ces développements « sous la main » pour les utiliser sans faute !

a. Somme : Former un DL3 au voisinage de 0 pour $\sin(x)+e^x$

On sait que $\begin{cases} \sin(x)=\dfrac{x^1}{1}-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+...+(-1)^p\,\dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+x^{2p+2}.\varepsilon(x) \\ e^x=1+\dfrac{x^1}{1}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+...+\dfrac{x^n}{n!}+x^n.\varepsilon(x) \end{cases}$ et donc, à l'ordre 3 :

$$\begin{cases} \sin(x)=\dfrac{x^1}{1}-\dfrac{x^3}{6}+x^3.\varepsilon(x) \\ e^x=1+\dfrac{x^1}{1}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+x^3.\varepsilon(x) \end{cases}$$

En additionnant les termes de même degré on obtient :

$$\sin(x)+e^x=1+2x+\frac{x^2}{2}+x^3.\varepsilon(x)$$

b. Produit : Former un DL3 au voisinage de 0 pour $\ln(1+x).e^x$

On sait que $\begin{cases} \ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+...+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}+x^n.\varepsilon(x) \\ e^x=1+\dfrac{x^1}{1}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+...+\dfrac{x^n}{n!}+x^n.\varepsilon(x) \end{cases}$ donc à l'ordre 3 :

$$\begin{cases} \ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+x^3.\varepsilon(x) \\ e^x=1+\dfrac{x^1}{1}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+x^3.\varepsilon(x) \end{cases}$$

En multipliant on va obtenir des termes de degré 1, 2, 3… mais pour les termes de degré supérieur à 3 on ne pourra jamais être sûr du résultat obtenu puisque les restes contiennent des termes de degré 4, 5, 6… termes non-exprimés et dont on ne connaît pas les coefficients. Par conséquent, en multipliant, on exprimera soigneusement les termes de degré 1, 2 et 3 mais on ne fera surtout pas les calculs donnant des termes de degré supérieur ou égal à 4. On obtient :

$$\ln(1+x)e^x=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}x^3.\varepsilon(x)$$

c. Quotient : Former un DL4 au voisinage de 0 pour $\dfrac{\ln(1+x)}{\cos(x)}$

On applique ici une technique nouvelle : la division des polynômes suivant les puissances croissantes… Cette division se pose et s'effectue comme une division euclidienne sauf qu'on range les polynômes suivant les puissances croissantes. Une seule réserve à faire avant de commencer : le diviseur doit commencer par une constante. Avec cette division comme avec la division Euclidienne (suivant les puissances décroissantes) on a toujours :

$$Dividende=Diviseur\times Quotient+Reste$$

Evidemment, il ne peut pas y avoir d'animation sur un polycopié… donc il faut que vous ayez le courage de prendre un papier, un crayon et une gomme pour faire au fur et à mesure ce qui est montré dans l'exemple ci-dessous !

Exemple : Division de $1+x$ par $1-x$

A la 1ère étape, le quotient est 1 et le reste est $2x$ … on peut donc écrire :

$$1+x=(1-x)\times 1+2x$$

A la 2ème étape, le quotient est $1+2x$ et le reste est $2x^2$ … on peut donc écrire

$$1+x=(1-x)\times(1+2x)+2x^2$$

A la 3ème étape, le quotient est $1+2x+2x^2$ et le reste est $2x^3$ … on peut donc écrire

$$1+x=(1-x)\times(1+2x+2x^2)+2x^3$$

Sauriez vous trouver l'étape suivante ? et celle d'après ?

Dividende	1	+	x		1	-	x	Diviseur	
1er Produit partiel	1	-	x		1	+	2x	+	$2x^2$
Reste n°1		+	2x						
2ème Produit partiel			2x	-	$2x^2$				
Reste n°2				+	$2x^2$				
3ème Produit partiel					$2x^2$	-	$2x^3$		
Reste n°3						+	$2x^3$		

Le quotient n'est pas "limité" : les termes obtenus ont des degrés de plus en plus grands, les restes correspondants aussi.

Muni de cette technique, comment obtenir un DL4 de $\dfrac{\ln(1+x)}{\cos(x)}$ au voisinage de 0 ? C'est simple : on divise suivant les puissance croissantes la partie régulière du DL4 de $\ln(1+x)$ par la partie régulière du DL4 de $\cos(x)$… jusqu'à ce que le reste ne contienne que des termes de degrés supérieurs à 4. On écrit alors $Dividende = Diviseur \times Quotient + Reste$ et on divise les deux membres de l'égalité par $Diviseur$ c'est à dire ici $\cos(x)$. A vous de jouer, la place ci-dessous est pour vous… mais « comme d'habitude » au brouillon d'abord !

d. Composée : Former un DL4 au voisinage de 0 pour $\ln(\cos(x))$

On sait que $\begin{cases} \ln(1+h) = h - \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{3} - \dfrac{h^4}{4} + ... + (-1)^{n+1}\dfrac{h^n}{n} + h^n.\varepsilon(h) \\ \cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + ... + (-1)^p \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1}.\varepsilon(x) \end{cases}$ donc à l'ordre 4 :

$$\begin{cases} \ln(1+h) = h - \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{3} - \dfrac{h^4}{4} + h^4.\varepsilon(h) \\ e^x = 1 + \dfrac{x^1}{1} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + x^4.\varepsilon(x) \end{cases}$$

On remarque que, si $x \to 0$ on a alors $\dfrac{x^1}{1} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + x^4.\varepsilon(x) \to 0$ donc en posant $h = \dfrac{x^1}{1} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + x^4.\varepsilon(x)$ on peut appliquer le développement de $\ln(1+h)$… lequel nécessite de connaître les différentes puissances de h. Tout est alors dans une présentation systématique, simple mais qui ne supporte pas d'à peu près.

On écrit en respectant les alignements des degrés, ce que vaut h, en dessous ce que vaut h^2 puis h^3 et h^4 …en tronquant les degrés à chaque fois qu'ils dépassent 4. On place les coefficients à utiliser dans une colonne à gauche des différentes puissances de h… et il n'y a plus qu'à additionner en colonnes pour obtenir le résultat souhaité !

Réponse : $\ln(\cos(x)) = -\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{12}x^4 + x^4\varepsilon(x)$

e. Dérivée : Sachant que $f(x) = 3 + 5x - 2x^2 + x^3 + x^3.\varepsilon(x)$ **et que** $f'(x)$ **possède un DL2 au voisinage de 0, préciser ce dernier.**

Réponse : $f'(x) = 5 - 4x + 3x^2 + x^2\varepsilon(x)$

f. Primitive : Sachant que $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ **donner un DL6 de** $f'(x)$ **au voisinage de 0 et en déduire un DL7 de** $\text{Arctan}(x)$ **au voisinage de 0.**

Réponse : $\text{Arctan}(x) = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{7}x^7 + x^7\varepsilon(x)$

g. Primitive encore : Sachant qu'un DL3 de $f'(x)$ **au voisinage de 0 est** $2x + 7x^2 - x^3 + x^3\varepsilon(x)$ **et que** $f(0) = -1$**, donner un DL4 de** $f(x)$ **au voisinage de 0.**

Réponse : $f(x) = -1 + x^2 + \dfrac{7}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4 + x^4\varepsilon(x)$

h. DL ailleurs qu'en 0…

On appelle DLn de $f(x)$ pour x voisin de x_0 un DLn de $f(x_0+h)$ pour h voisin de 0.

- Former un DL3 de $\sin(x)$ pour x voisin de $\dfrac{\pi}{6}$

Conseils : Pensez aux formules de trigonométrie… $\sin(\frac{\pi}{6}+h)=...$ Puis comme h sera proche de 0, pensez à utiliser les DL connus de $\sin(h)$ et de $\cos(h)$ …Enfin, additionnez et n'oubliez pas que si $x=\frac{\pi}{6}+h$ alors $h=x-\frac{\pi}{6}$ … et surtout ne développez pas les puissances de $(x-\frac{\pi}{6})$!

Réponse : $\sin(x)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}(x-\frac{\pi}{6})^2-\frac{\sqrt{3}}{12}(x-\frac{\pi}{6})^3+(x-\frac{\pi}{6})^3\varepsilon(x-\frac{\pi}{6})\ldots$

- Former un DL3 de $\tan(x)$ pour x voisin de $\frac{\pi}{4}$

Réponse : $\tan(x)=1+2(x-\frac{\pi}{4})+2(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{8}{3}(x-\frac{\pi}{4})^3+(x-\frac{\pi}{4})^3\varepsilon(x-\frac{\pi}{4})$

- Former un DL3 de e^x pour x voisin de 1

Réponse : $e^x=e\left(1+(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3\right)+(x-1)^3\varepsilon(x-1)$