

Polynômes

A. Polynômes

A-I. Rappel sur des notions générales vues en collège et lycée

a. Définitions élémentaires

On appelle monôme dans $\mathbb{R}[X]$ toute expression de la forme $a.X^n$ où a est un réel et n un entier naturel.

On appelle polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ toute somme de monômes dans $\mathbb{R}[X]$.

b. Remarques

Dans un polynôme, les monômes de même degré se regroupent en un seul monôme : on dit que des monômes de même degré sont des monômes semblables.

Lorsque, dans un polynôme, on a regroupé tous les monômes de même degré on dit que le polynôme est écrit sous forme réduite.

Lorsque deux polynômes sont écrits sous forme réduite, dire qu'ils sont égaux revient à dire que leurs monômes de même degré ont les mêmes coefficients... ce qui rappelle l'égalité entre vecteurs exprimés à l'aide d'un repère :

- dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) où $\begin{cases} \vec{u} = a.\vec{i} + b.\vec{j} \\ \vec{v} = c.\vec{i} + d.\vec{j} \end{cases}$, $\vec{u} = \vec{v}$ revient à $\begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$
- dans l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $\begin{cases} \vec{u} = a.\vec{i} + b.\vec{j} + c.\vec{k} \\ \vec{v} = d.\vec{i} + e.\vec{j} + f.\vec{k} \end{cases}$, $\vec{u} = \vec{v}$ revient à $\begin{cases} a = d \\ b = e \\ c = f \end{cases}$
- dans l'ensemble des polynômes de degré au plus n où $\begin{cases} P(X) = a_n.X^n + a_{n-1}.X^{n-1} + \dots + a_0 \\ Q(X) = b_n.X^n + b_{n-1}.X^{n-1} + \dots + b_0 \end{cases}$,
 $P = Q$ revient à $a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \dots, a_0 = b_0$

c. Vocabulaire

Dans le monôme $a.X^n$, a est appelé coefficient et, si a n'est pas nul, alors n est appelé degré du monôme. Dans le cas où le coefficient est nul, le degré devient indéterminé... on décide (c'est une convention mûrement réfléchie) que dans ce cas le degré est $-\infty$.

Dans un polynôme écrit sous forme réduite, le plus grand des degrés des monômes qui apparaissent dans ce polynôme est appelé degré du polynôme... et si aucun monôme n'apparaît, on décide alors que le degré du polynôme est encore $-\infty$.

Remarque : Les exposants sont toujours positifs ou nuls (alors que le degré peut être $-\infty$), et les coefficients sont des réels.

A-II. Factorisation et division euclidienne

a. Ecriture factorisée

Si $P(X)$ est un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$, il arrive qu'on puisse trouver deux autres polynômes dans $\mathbb{R}[X]$, $D_1(X)$ et $D_2(X)$, tels que $P(X) = D_1(X).D_2(X)$, on dit alors que :

- $P(X)$ peut être factorisé par $D_1(X)$ et $D_2(X)$
- $D_1(X).D_2(X)$ est une écriture factorisée de $P(X)$

Lorsqu'on demande de factoriser un polynôme, la réponse souhaitée est la forme « la plus factorisée » possible : tant qu'un des facteurs peut être factorisé il faut le faire.

b. Division euclidienne

Si $P(X)$ et $D(X)$ sont deux polynômes quelconques de $\mathbb{R}[X]$, on peut toujours trouver deux autres polynômes $Q(X)$ et $R(X)$ tels que
$$\begin{cases} P(X) = D(X).Q(X) + R(X) \\ \text{avec } \text{degré}(R(X)) < \text{degré}(D(X)) \end{cases}$$

Les polynômes $Q(X)$ et $R(X)$ s'obtiennent en effectuant la division euclidienne de $P(X)$ par $D(X)$. Bien évidemment, si $R(X)$ est le polynôme nul on a $P(X) = D(X).Q(X)$ et alors $D(X).Q(X)$ est une écriture factorisée de $P(X)$.

c. Propriétés importantes

Le coefficient a étant un réel, dire qu'un polynôme $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ est factorisable par $(X - a)$ revient exactement à dire que $P(a) = 0$ et on dit alors que a est une racine de $P(X)$.

Tout polynôme $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ dont le degré est **strictement supérieur** à 2 est factorisable dans $\mathbb{R}[X]$... mais on ne sait pas en général comment trouver la factorisation : les seuls cas qu'on sache vraiment bien traiter sont les polynômes de degré 2 !

Attention : Ce n'est pas parce qu'un polynôme n'a pas de racine qu'il n'est pas factorisable !!!

Exemple : $X^4 + 2X^2 + 1$ n'a évidemment pas de racine car il est strictement positif pour toute valeur de X mais pourtant $X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2 + 1).(X^2 + 1)$.

B. Généralisations et compléments

B-I. Avec des coefficients complexes

On appelle monôme dans $\mathbb{C}[X]$ toute expression de la forme $a.X^n$ où a est un complexe et n un entier naturel.

On appelle polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ toute somme de monômes dans $\mathbb{C}[X]$.

On retrouve alors les mêmes définitions pour les coefficients, les degrés, les monômes semblables... les notions de factorisation, de division euclidienne etc.

Les exposants restent des entiers positifs ou nuls, mais les coefficients peuvent maintenant être des complexes... sans qu'ils le soient obligatoirement : les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ sont « évidemment » des polynômes de $\mathbb{C}[X]$.

B-II. Ce qui change avec les complexes

Tout polynôme $P(X)$ dans $\mathbb{C}[X]$ dont le degré est **supérieur ou égal** à 2 est factorisable dans $\mathbb{C}[X]$... mais on ne sait pas en général comment trouver la factorisation : les seuls cas qu'on sache encore vraiment bien traiter sont les polynômes de degré 2 !

Si on reprend l'exemple précédent, la factorisation se poursuit avec : $X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2 + 1).(X^2 + 1) = (X - j).(X + j).(X - j).(X + j)$

Remarque importante : Si $P(X)$ est dans $\mathbb{R}[X]$ et s'il a une racine complexe c alors ce même polynôme a aussi pour racine complexe \bar{c} (le conjugué de c)...

En effet si on a $P(X) = a_0 + a_1.X + a_2.X^2 + \dots + a_n.X^n$ où les coefficients sont réels, avec $P(c) = 0$ alors $P(\bar{c}) = a_0 + a_1.c + a_2.c^2 + \dots + a_n.c^n = 0$ et on en déduit :

$$\begin{aligned} \overline{P(c)} &= \overline{a_0 + a_1.c + a_2.c^2 + \dots + a_n.c^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1.c} + \overline{a_2.c^2} + \dots + \overline{a_n.c^n} \\ &= \overline{a_0} + \overline{a_1.c} + \overline{a_2.c^2} + \dots + \overline{a_n.c^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1.c} + \overline{a_2.c^2} + \dots + \overline{a_n.c^n} \\ &= P(\overline{c}) = \overline{0} = 0 \end{aligned}$$

Cette remarque peut parfois servir à trouver une factorisation dans $\mathbb{R}[X]$: on commence par chercher une factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ puis en regroupant les facteurs qui correspondent à des racines conjuguées on obtient la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

Par exemple, essayez de factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $1+X^5$ et en déduire sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

B-III. Compléments

a. Deux théorèmes fondamentaux

Théorème de d'Alembert (1717-1783) : Tout polynôme non-constant dans $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine complexe.

Théorème de Gauss (1777-1855) : Si $P(X), Q(X), R(X)$ sont trois polynômes de $\mathbb{R}[X]$ ou de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(X)$ ne divise pas $Q(X)$ mais divise $Q(X).R(X)$ alors $P(X)$ divise $R(X)$.

(variante : Si $P(X)$ ne divise pas $Q(X)$ ni $R(X)$ alors $P(X)$ ne divise pas $Q(X).R(X)$)

b. Notions vectorielles

Si on accepte de considérer $1, X, X^2, \dots, X^n$ comme des vecteurs, alors :

1. Les vecteurs $1, X, X^2, \dots, X^n$ sont indépendants, c'est à dire qu'aucun d'eux ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.
2. Les vecteurs $1, X, X^2, \dots, X^n$ sont générateurs pour les polynômes de degré inférieur ou égal à n , c'est à dire que tout polynôme tel que $P(X) = a_0 + a_1.X + a_2.X^2 + \dots + a_n.X^n$ est une combinaison linéaire de $1, X, X^2, \dots, X^n$
3. Tout polynôme tel que $P(X) = a_0 + a_1.X + a_2.X^2 + \dots + a_n.X^n$ peut être considéré comme un vecteur dont les coordonnées sont $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ dans la base $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

c. Racines multiples

On dit que r (réel ou complexe) est une racine multiple d'ordre α (entier naturel) pour un polynôme $P(X)$ (dans $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$) lorsque $P(X)$ est factorisable par $(X-r)^\alpha$.

Propriété :

Dire que r est une racine multiple d'ordre α pour un polynôme $P(X)$ revient à dire que $P(r) = 0, P'(r) = 0, \dots, P^{(\alpha-1)}(r) = 0, P^{(\alpha)}(r) \neq 0$

Démonstration (dans un sens... puis dans l'autre) :

1^{er} partie de la démonstration : Partons de $P(X)$ est factorisable par $(X-r)^\alpha$ et montrons que $P(r) = 0, P'(r) = 0, \dots, P^{(\alpha-1)}(r) = 0, P^{(\alpha)}(r) \neq 0$.

On a $P(X) = (X-r)^\alpha.Q(X)$ donc en dérivant... $P'(X) = \alpha(X-r)^{\alpha-1}.Q(X) + (X-r)^\alpha.Q'(X)$ c'est à dire, en factorisant : $P'(X) = (X-r)^{\alpha-1}[\alpha.Q(X) + (X-r).Q'(X)]$ et on obtient donc $P'(r) = 0$ puisque $(X-r)^{\alpha-1}$ est en facteur.

De même, en calculant $P''(X)$, on obtient un polynôme où $(X-r)^{\alpha-2}$ est en facteur... donc $P''(r) = 0$... mais en arrivant à $P^{(\alpha)}(X)$, il n'y aura en facteur que $(X-r)^{\alpha-\alpha}$ qui vaut 1 lorsqu'on calcule $P^{(\alpha)}(r)$ et donc $P^{(\alpha)}(r) \neq 0$.

2^{ème} partie de la démonstration : On verra dans le chapitre suivant que $P(X)$ peut s'écrire sous la forme : $P(X) = P(r) + P'(r) \cdot \frac{(X-r)}{1!} + P''(r) \cdot \frac{(X-r)^2}{2!} + \dots + P^{(n)}(r) \cdot \frac{(X-r)^n}{n!}$ le degré de $P(X)$ étant n .

Si on est sûr que $P(r) = 0, P'(r) = 0, \dots, P^{(\alpha-1)}(r) = 0, P^{(\alpha)}(r) \neq 0$ alors on a, en supprimant les termes nuls : $P(X) = P^{(\alpha)}(r) \cdot \frac{(X-r)^\alpha}{\alpha!} + \dots + P^{(n)}(r) \cdot \frac{(X-r)^n}{n!}$ et on peut donc factoriser par $(X-r)^\alpha$.

d. Schéma de Horner (William George HORNER, anglais, 1786-1837)

Le calcul « méthodique » de la valeur d'un polynôme fait réaliser beaucoup d'opérations élémentaires, c'est à dire d'additions et de multiplications. Le but de la méthode de Horner est de diminuer considérablement le nombre d'opérations élémentaires à effectuer.

Tout se résume à une « formule » :

$$a_0 + a_1 \cdot X + a_2 \cdot X^2 + \dots + a_n \cdot X^n = (\dots(((0 + a_n)X + a_{n-1})X + a_{n-2})X \dots)X + a_0$$

C. L'intérêt des polynômes

Les polynômes sont intéressants pour de multiples raisons :

Ils n'utilisent que les opérations élémentaires addition et multiplication.

Ils peuvent être vus comme des fonctions, ce qui permet d'imaginer des démonstrations de type analytiques, mais aussi comme des vecteurs ce qui permet d'imaginer des démonstrations algébriques.

Les méthodes de calcul spécifiques aux polynômes comme la méthode de Horner ou la méthode des différences finies permettent d'imaginer des applications où la durée des calculs serait rédhibitoire pour toute autre sorte de fonction.