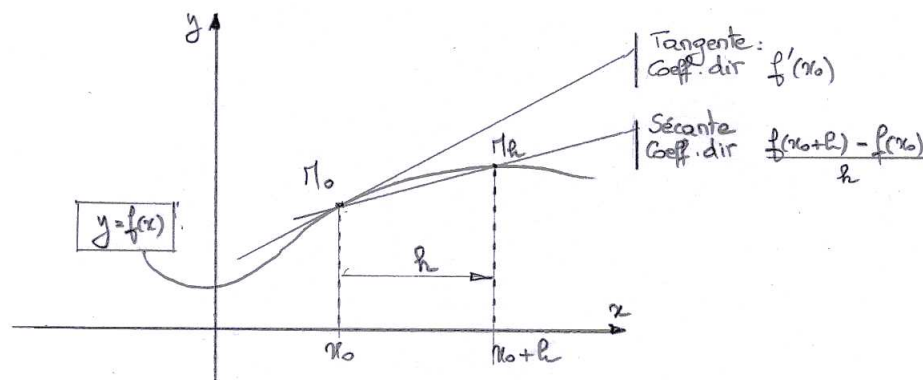


La notation différentielle

A. Cas d'une fonction à une variable.

A-I. Rappel sur la dérivée



On utilise une fonction f dont la représentation graphique est « sans coupure » et « sans coude »... On construit la sécante Σ à la courbe C_f représentant f passant par les points M_0 et M_h d'abscisses respectives x_0 et x_0+h .

Cette sécante a pour coefficient directeur $a(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

On fait tendre h vers 0 et on observe que :

- M_h « glisse » sur la courbe en s'approchant de M_0
- Σ tourne autour de M_0 en s'approchant de la position tangente à C_f en M_0
- $a(h)$ devient $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ qui est le coeff. directeur de la tangente à C_f en M_0

On définit alors à la fois la tangente et la dérivée...

Définitions :

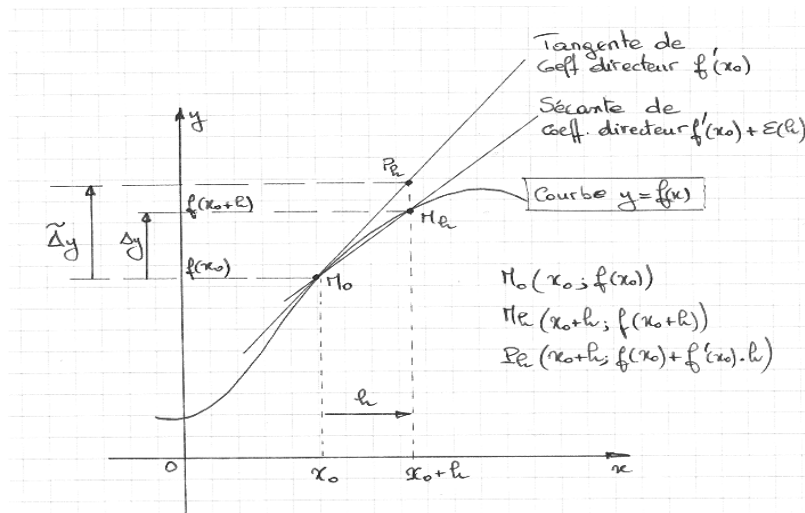
- Si f est une fonction définie dans un intervalle contenant x_0 , on appelle nombre dérivé de f en x_0 , le nombre $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ s'il existe.
- La fonction qui, à tout x de l'ensemble de définition de f associe, s'il existe, le nombre dérivé de f est appelée fonction dérivée de f et est notée f' . Lorsque le nombre dérivé de f en x existe, il est donc noté $f'(x)$.
- Si f est une fonction définie dans un intervalle contenant x_0 , et si le nombre dérivé de f en x_0 existe, alors la droite passant par $M_0(x_0; f(x_0))$ et dont le coefficient directeur est le nombre dérivé est appelée tangente à C_f en M_0 .

Remarque :

Puisque, avec les notations précédentes on a $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} a(h)$ on peut écrire :

$$a(h) = f'(x_0) + \varepsilon(h) \text{ où } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

A-II. Variation vraie et variation estimée



Soit f une fonction dérivable dans un intervalle contenant x_0 et $x_0 + h$.

On appelle variation vraie de f entre les antécédents x_0 et $x_0 + h$ le nombre Δy tel que :

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

On appelle variation estimée de f entre les antécédents x_0 et $x_0 + h$ le nombre $\tilde{\Delta y}$ tel que :

$$\tilde{\Delta y} = f'(x_0) \cdot h$$

Exemple : On utilise la fonction $f(x) = x^2$ avec $x_0 = 1$ et $h = 0,1$.

- La variation vraie est $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) = (1,1)^2 - (1)^2 = 0,21$
- La variation estimée est $\tilde{\Delta y} = f'(x_0) \cdot h = 2 \times 0,1 = 0,2$

L'intérêt de cette notion de variation estimée est évident pour les grandeurs qui évoluent en fonction du temps lorsqu'on veut prévoir la valeur pour un instant futur. Par exemple, on peut tenter de prévoir la température en un lieu « demain »... ou tenter de prévoir le cours du \$ par rapport à l'€ dans deux jours... Bien entendu, on ne peut prévoir que ce qui relève d'un futur « proche » c'est à dire pour des valeurs de h proches de 0.

Toutes ces prévisions reposent sur l'idée « simple » que d'une part,

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) \text{ donne } f(x_0 + h) = f(x_0) + \Delta y$$

et que d'autre part, si « $\tilde{\Delta y}$ est proche de Δy » alors

$$\tilde{\Delta y} = f'(x_0) \cdot h \text{ donne } f(x_0 + h) \cong f(x_0) + \tilde{\Delta y} \cong f(x_0) + f'(x_0) \times h$$

Il reste à préciser ce que signifie « $\tilde{\Delta y}$ est proche de Δy »... c'est la notion de grandeurs équivalentes déjà aperçue dans les exercices du chapitre 2, ex-B1 :

Si $h \rightarrow 0$ et si $f'(x_0)$ est non nul, on a $\tilde{\Delta y} \sim \Delta y$ c'est à dire $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{\Delta y}}{\Delta y} = 1$

On s'en assure :

Attention : signe qui se lit « équivalent à » à ne pas confondre avec \cong qui se lit « voisin de ».
Par exemple, on peut écrire $0,01 \cong 0$ mais jamais $0,01 \sim 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\tilde{\Delta} y} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{f'(x_0) \times h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(h) \times h}{f'(x_0) \times h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0) + \varepsilon(h)}{f'(x_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\varepsilon(h)}{f'(x_0)} \right) = 1\end{aligned}$$

A-III. Variable « choisie » et variable « mesurée »

Dans une expérience de physique, on distingue les variables « choisies » et les variables « mesurées ». Par exemple, en mécanique on peut choisir la masse accrochée à un ressort et mesurer son allongement... en électricité on peut choisir la tension aux bornes d'un circuit et mesurer l'intensité qui le traverse.

Lorsqu'une variable est choisie, on admet que sa variation vraie est égale à sa variation estimée. Autrement dit, si x est une variable choisie on a $\Delta x = \tilde{\Delta} x$.

Evidemment pour une variable mesurée ceci est tout à fait faux... Si y est une variable mesurée en fonction de x , alors $\Delta y \neq \tilde{\Delta} y$

On peut approximativement confondre la notion de variable choisie avec la notion d'antécédent pour une fonction et la notion de variable mesurée avec la notion d'image pour cette fonction.

A-IV. Variable nommée ou non-nommée

En physique, les variables d'un phénomène sont toujours mystérieuses, voir inconnues... Par exemple, on écrit à propos de la résistance d'un fil électrique : $r = \rho \cdot \frac{l}{S}$, mais de quoi dépend r ?

En fait, toutes les variables nommées dans cette relation dépendent d'autres grandeurs, par exemple de la température !

En mathématiques, lorsqu'on dit que f est une fonction de x , on ne risque pas d'être contredit par l'expérience alors qu'en physique toute affirmation peut être confirmée ou infirmée par l'expérience. Les physiciens utilisent donc des noms pour représenter les RESULTATS produits par des fonctions dont les variables sont en général non-nommées alors que les matheux utilisent des noms distincts pour les FONCTIONS et pour les RESULTATS que produisent ces fonctions.

En pensant à la surface d'un disque de rayon R , un physicien écrit $S = \pi R^2$ et dit que S est fonction de R . Dans ces conditions, S représente à la fois une fonction et un nombre. Pour un matheux c'est difficilement tolérable... et cela risque de provoquer des catastrophes.

En fait on peut tout autant écrire $S = \pi R^2$ que $S = \pi \cdot \frac{D^2}{4}$ si R est le rayon et D est le diamètre... Et alors si on dérive que se passe-t-il ?

$$S = \pi R^2 \text{ donne } S' = 2\pi R \text{ (en pensant que } R \text{ est la variable)}$$

$$S = \pi \cdot \frac{D^2}{4} \text{ donne } S' = \pi \cdot \frac{2D}{4} = \pi R \text{ (en pensant que } D \text{ est la variable)}$$

Les deux résultats sont différents parce que dans un cas la variable considérée est R et dans l'autre cas c'est D . Et si on ignore quelle est la « bonne » variable on ne peut pas choisir entre les deux cas donc on ne peut pas dire quelle est la dérivée !

C'est pour ces raisons que les physiciens n'utilisent pratiquement jamais la notation des dérivées mais qu'ils utilisent la notation différentielle.

A-V. La différentielle et ses notations

Soit f une fonction de la variable x et posons $y = f(x)$. Dans ces conditions, x est une variable choisie alors que y est une variable mesurée.

Lorsque x varie de x_0 à $x_0 + h$, la variation estimée de y , c'est à dire $\tilde{\Delta}y$, est $f'(x_0).h$ alors que la variation de x est Δx (ou bien $\tilde{\Delta}x$ ou encore $h \dots$).

On peut alors écrire $\tilde{\Delta}y = f'(x_0).\Delta x$ ce qui signifie que la variation estimée de y s'obtient à partir de la variation de x en multipliant par le coefficient $f'(x_0)$: on voit



apparaître une **fonction linéaire** de \mathbb{R} vers \mathbb{R} telle que : $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \Delta x \mapsto f'(x_0).\Delta x \end{cases}$. On notera cette fonction df_{x_0} et on l'appellera différentielle de f en x_0 .

Rappel : Les fonctions linéaires de \mathbb{R} vers \mathbb{R} sont les fonctions f telles que $f(x) = ax \dots$ Elles vérifient deux propriétés fondamentales :

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \text{ et } f(kx) = k.f(x)$$

La représentation graphique d'une fonction linéaire de \mathbb{R} vers \mathbb{R} est toujours une droite passant par l'origine du repère.

Cas particulier fondamental :

Supposons que f soit l'identité c'est à dire $f(x) = x$ pour tout x réel.

- On a alors $f'(x_0) = 1$ quel que soit x_0 et par conséquent $df_{x_0}(\Delta x) = 1.\Delta x = \Delta x$.
- Si on utilise la confusion habituelle entre les notations, ici entre $f(x)$ et x , on écrit alors $dx_{x_0}(\Delta x) = \Delta x$ pour tout $x_0 \dots$ que l'on simplifie en $dx(\Delta x) = \Delta x$ puisque l'indice x_0 ne sert à rien. Ceci montre que dx , quand la variable choisie est x , n'est rien d'autre que l'identité dans \mathbb{R} .

Cas général, retour à la dérivée :

Supposons que f soit une fonction dérivable telle que $f(x) = y$ pour tout x réel.

- On a $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\tilde{\Delta}y} \cdot \frac{\tilde{\Delta}y}{\Delta x} \right)$
- Comme on sait déjà que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tilde{\Delta}y}{\Delta x} = 1$, il ne reste plus que $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\tilde{\Delta}y}$ c'est à dire :

$$f'(x_0) = \begin{cases} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{df_{x_0}(\Delta x)}{dx_{x_0}(\Delta x)} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy_{x_0}(\Delta x)}{dx_{x_0}(\Delta x)} \end{cases} \text{ ce qu'on écrit } \boxed{f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)} \text{ ou bien } \boxed{f'(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0)}$$

Cette dernière écriture est donc une voie pour écrire la dérivée d'une fonction quand on ne connaît pas sa variable...

Comment ça marche ?

- si $S = \pi.R^2$ on écrira $\frac{dS}{dR} = 2\pi.R$ ou $dS = 2\pi.R.dR$
- si $S = \pi.\frac{D^2}{4}$ on écrira $\frac{dS}{dD} = \pi.\frac{2D}{4} = \pi R$ ou $dS = \pi.R.dD$

Les deux écritures ne sont plus contradictoires car on sait que $D = 2R$ donc $dD = 2.dR$.

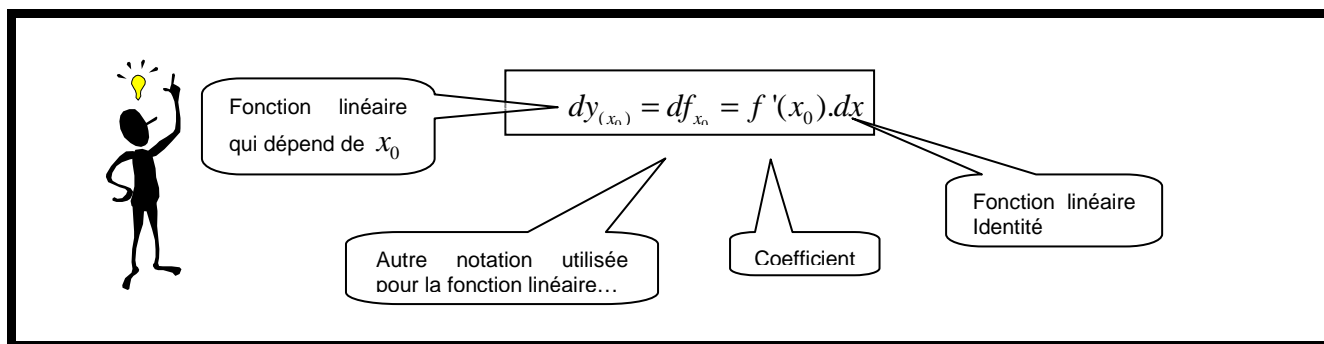
Attention à bien comprendre que :

- $\frac{dy}{dx}$ est la fonction dérivée et $\frac{dy}{dx}(x_0)$ est l'image de x_0 pour cette dérivée
- Une différentielle ne peut s'exprimer qu'en fonction d'une autre différentielle : s'il y a « d » d'un côté d'une égalité, il doit y avoir aussi « d » de l'autre côté.
- Lorsqu'on sait en quel x_0 est construite la différentielle d'une fonction f il vaut mieux écrire df_{x_0} plutôt que df « tout court »...

En résumé :

y étant fonction de x , on écrit $y = f(x)$ et alors :

$dy_{(x_0)}$ (ou df_{x_0}) est la fonction linéaire qui multiplie les variations de x par $f'(x_0)$



Si on veut utiliser cette différentielle, on doit l'appliquer à une variation de x :

$$dy_{(x_0)}(truc) = f'(x_0).dx(truc) = f'(x_0).(truc)$$

Evidemment cette notation (correcte et complète) est lourde... donc elle sera souvent abrégée, **donc rendue incorrecte**, pour être rendue plus maniable.

On rencontrera donc les notations :

$$dy = y'.dx \text{ ou } dy = y'(x).dx \text{ ou } \frac{dy}{dx} = y' \text{ ou } \frac{dy}{dx} = y'(x)$$

$$df = f'(x).dx \text{ etc.}$$

Remarque : Pour une fonction à une seule variable, dire que cette fonction est dérivable en x_0 ou qu'elle est différentiable en x_0 revient au même... et ce ne sera pas la même chose pour les fonctions à plusieurs variables.

Exemples d'exercices simples :

- On donne $f(x) = x + \sin(\pi x)$. Quelle est la différentielle de f ? Estimer la variation de f lorsque x varie de 0,5 à 0,51.
- On donne $f(x) = \frac{1+e^{2x}}{1-x}$. Pour quelles valeurs de la variable cette fonction est-elle différentiable ? Quelle est la différentielle de f ? Combien vaut $f(0)$? Estimer la valeur de $f(-0.02)$.
- En TP, on mesure Q en fonction de t...

t	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
Q	12,8	13,1	13,4	13,9	14,6	15,8	17,1

Représenter ces données et estimer (intelligemment) les valeurs de $Q(3,51)$, de $Q(3,99)$

A-VI. Propriétés de la différentielle

a. Différentielle d'une somme

Si u et v sont deux fonctions de la variable x , dérivables dans un même intervalle, on a pour tout x de cet intervalle : $d(u+v) = du + dv$

Démonstration : triviale...

b. Différentielle d'un produit

Si u et v sont deux fonctions de la variable x , dérivables dans un même intervalle, on a pour tout x de cet intervalle : $d(uv) = v.du + u.dv$

Démonstration : triviale...

c. Différentielle d'un quotient

Si u et v sont deux fonctions de la variable x , dérivables dans un même intervalle, on a pour tout x de cet intervalle où v n'est pas nulle : $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v.du - u.dv}{v^2}$

Démonstration : encore triviale...

d. Différentielle d'une composée

Si u et v sont deux fonctions de la variable x , telles que v soit dérivable en x_0 et u dérivable en $v(x_0)$, on a en x_0 : $d(u \circ v) = du$

Démonstration : pas triviale du tout... mais compréhensible !

- Version rapide : $d(u \circ v) = [u \circ v]' . dx = v' . u'(v) . dx = u'(v) . v' dx = u'(v) . dv = du$
- Version plus « physique ».

On suppose que u est une fonction de la variable v ... donc on peut écrire $du = u'(v) . dv$.

On s'aperçoit alors que v est une fonction de x ... donc on peut écrire $dv = v'(x) . dx$ et on peut remplacer dans l'égalité précédente qui devient :

$$du = u'(v) . dv = u'(v) . v'(x) . dx = [u \circ v]' . dx = d(u \circ v)$$

En fait, on retrouve ici l'argument qui a poussé à définir cette notation différentielle : alors que la dérivée d'une fonction dépend de la variable de cette fonction, **la différentielle d'une fonction ne dépend pas de la variable de cette fonction.**

Un exemple d'application entièrement traité.

On fait une expérience. On sait que pendant cette expérience, une grandeur physique f va un peu varier parce que f dépend d'un paramètre physique, disons l , qui va légèrement varier. La théorie montre que f et l sont liés par $f(l) = l^2 + \cos(l)$ et on en déduit que $df = (2l - \sin(l)) . dl$

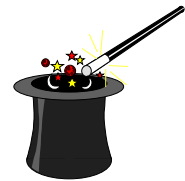
Après l'expérience, on s'aperçoit que la température T n'a pas été constante et que l dépend de T suivant la relation $l(T) = \ln(T) + 4T$... donc il serait plus judicieux d'utiliser comme variable T au lieu de l ... et heureusement, grâce à la différentielle il n'est pas nécessaire de refaire tous les calculs !

Il suffit de remarquer que de $l(T) = \ln(T) + 4T$ on déduit $dl = \left(\frac{1}{T} + 4\right) . dT$ d'où, en remplaçant :

$$df = (2l - \sin(l)) . dl = (2l - \sin(l)) . \left(\frac{1}{T} + 4\right) . dT = (2 \ln(T) + 8T - \sin(\ln(T) + 4T)) . \left(\frac{1}{T} + 4\right) . dT$$

Et on peut, juste pour se tranquilliser, vérifier ce dernier résultat en exprimant dès le départ f en fonction de T pour calculer directement la dérivée par rapport à T :

$$f(l) = l^2 + \cos(l) \text{ devient } f(T) = (\ln(T) + 4T)^2 + \cos(\ln(T) + 4T) \text{ donc } f'(T) = \dots \text{ à vous !!!}$$



Exemple d'application : Une échelle de longueur L est appuyée contre un mur vertical, son pied reposant sur un sol horizontal... Le pied de l'échelle glisse et s'éloigne du mur à la vitesse v. Quelle est la vitesse de chute du haut de l'échelle lorsqu'il passe à la hauteur L/2 puis L/4 et enfin L/10. Application numérique : L=6m, v=1 m/s.

A-VII. Tableau des différentielles usuelles

Puisque la différentielle d'une fonction ne dépend pas de la variable de cette fonction, les formules auront toujours la même forme quelle que soit la variable... et remarquez bien qu'il n'y a plus jamais de dérivées u', v' ... dans ces formules :

Si $f(u) =$	$\sin(u)$	$\cos(u)$	$\tan(u)$
alors $df_{u_0} =$	$\cos(u_0).du$	$-\sin(u_0).du$	$(1 + \tan^2(u_0)).du$ ou $\frac{1}{\cos^2(u_0)}.du$

Si $f(u) =$	$\ln(u)$	e^u	$\frac{1}{u}$	\sqrt{u}	u^n avec $n \neq 1$
alors $df_{u_0} =$	$\frac{du}{u_0}$	$e^{u_0}.du$	$-\frac{du}{u_0^2}$	$\frac{du}{2\sqrt{u_0}}$	$n.u_0^{n-1}.du$

B. Cas d'une fonction à deux variables indépendantes

B-I. Dérivées partielles

Si f est une fonction de deux variables **indépendantes** x et y, on ne peut plus dériver comme on le faisait pour une fonction à une seule variable... On doit distinguer deux cas, deux façons de dériver, suivant qu'on considère l'une des variables ou l'autre.

Soit $f : (x; y) \rightarrow f(x; y)$, on appelle dérivée partielle de f par rapport à x la fonction qui associe à tout couple $(x_0; y_0)$ la limite (si elle existe) : $\lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h_x; y_0) - f(x_0; y_0)}{h_x}$.

Cette dérivée partielle est notée soit f'_x soit $\frac{\partial f}{\partial x}$. L'emploi des ∂ au lieu des d n'est pas une façon du prof de math de se faire remarquer... c'est une nécessité qu'on va expliquer très bientôt !

On définit de même la dérivée partielle de f par rapport à y :

Soit $f : (x; y) \rightarrow f(x; y)$, on appelle dérivée partielle de f par rapport à y la fonction qui associe à tout couple $(x_0; y_0)$ la limite (si elle existe) : $\lim_{h_y \rightarrow 0} \frac{f(x_0; y_0 + h_y) - f(x_0; y_0)}{h_y}$.

On la note f'_y ou $\frac{\partial f}{\partial y}$...

Remarque : En fait, pour une fonction à deux variables **indépendantes**, on fait comme si l'une des variables était constante et on dérive par rapport à l'autre... ou bien le contraire.

Exemples :

- Si $f(x; y) = 2xy + y.\sin(y)$ on a $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + \sin(y) + y.\cos(y) \end{cases}$

▪ Si $f(x; y) = x \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$ on a
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

B-II. Estimation pour les fonctions à deux variables

Si x varie de h_x et si y varie de h_y , lorsque $f : (x; y) \rightarrow f(x; y)$ la variation vraie est $\Delta f = f(x_0 + h_x; y_0 + h_y) - f(x_0; y_0)$ et la variation estimée est $\tilde{\Delta} f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) \cdot h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \cdot h_y$.

Cette variation estimée n'a rien de mystérieux : elle tient compte des variations de chacune des deux variables en multipliant chacune par la valeur de la dérivée correspondante. Lorsque x varie, on multiplie ses variations par la dérivée par rapport à x et lorsque c'est y qui varie on multiplie ses variations par la dérivée par rapport à y ... enfin, l'estimation totale est la somme des deux variations ainsi calculées.

Exemple : On donne $f(x; y) = 2xy + y \cdot \sin(y)$ et on demande d'estimer la variation lorsque $(x; y)$ varie de $(1; \frac{\pi}{2})$ à $(1,03; \frac{\pi}{2} + 0,01)$.

On obtient $\tilde{\Delta} f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) \cdot h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \cdot h_y$ ce qui donne $\tilde{\Delta} f = \pi \times 0,03 + 3 \times 0,01$

B-III. Différentielle d'une fonction à deux variables

On suppose que x et y sont deux variables choisies et **indépendantes**. On note dx la fonction telle que $dx(h_x; h_y) = h_x$ et dy celle telle que $dy(h_x; h_y) = h_y$: ce sont des projections... et les projections sont des applications linéaires.

On appelle différentielle de f en $(x_0; y_0)$ la fonction linéaire à deux variables telle que :

$$df_{(x_0; y_0)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \cdot dy$$

Lorsqu'on applique cette fonction aux variables h_x et h_y , on obtient :

$$df_{(x_0; y_0)}(h_x; h_y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) \cdot dx(h_x; h_y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \cdot dy(h_x; h_y)$$

c'est à dire :

$$df_{(x_0; y_0)}(h_x; h_y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) \cdot h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) \cdot h_y$$

Notation abrégée... et dangereuse : Lorsque f est une fonction à deux variables indépendantes x, y sa différentielle df est souvent notée $df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$ si bien que ceux qui n'ont pas compris la différence entre les d et les ∂ vont simplifier et ce sera l'horreur !

Exemple : Quelle est la différentielle de $R = \frac{2x}{1+y^2}$?

On a $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{1}{1+y^2}$ et $\frac{\partial R}{\partial y} = 2x \cdot \frac{-2y}{(1+y^2)^2} = -\frac{4xy}{(1+y^2)^2}$ donc $dR = \frac{1}{1+y^2} \cdot dx - \frac{4xy}{(1+y^2)^2} \cdot dy$

C. Généralisation pour les fonctions à n variables

Si x_1, x_2, \dots, x_n sont des variables indépendantes, et si $f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ alors la différentielle de f est :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} . dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} . dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} . dx_3 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} . dx_n$$

Dans cette écriture, pour alléger on n'indique plus à quel « endroit » on travaille, ni quelles sont les variations de chacune des variables...

Exemple : On donne $f(x; y; z) = x + \frac{y}{z}$. Quelle est la différentielle de f ? Estimer la variation de f lorsque $(x; y; z)$ varie de $(1; 2; 3)$ à $(1, 1; 1, 9; 2, 99)$.

D. Quels sont les objectifs à atteindre ?

Avoir compris que la notion de différentielle et la notion de dérivées sont deux « cousines » mais que ce n'est pas la même chose : une dérivée est une fonction « quelconque » alors qu'une différentielle est une fonction linéaire.

Avoir compris que la dérivée d'une fonction dépend de la variable de cette fonction alors que la différentielle d'une fonction ne dépend pas de la variable de cette fonction... ce qui rend les différentielles indispensables en physique.

Avoir compris que les différentielles vont servir de modèles dans tous les problèmes d'estimation.

Avoir compris que la notation complète étant trop lourde, on la simplifie en faisant des abus de langage et d'écriture mais que tous les abus ne sont pas tolérables... en particulier, les notations d , ∂ , et δ représentent des choses très différentes et la confusion entre elles est impossible.

Savoir calculer des dérivées même de fonctions « compliquées » (somme, produit, quotient, composée...) y compris avec des fonctions trigonométriques directes ou réciproques, circulaires ou hyperboliques.

Savoir utiliser les différentielles dans les problèmes de « robinet » à débit constant.

