

Notions de géométrie

A. Les systèmes de coordonnées dans le plan

A-I. Coordonnées cartésiennes

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , tout point peut être repéré par deux nombres réels appelés abscisse et ordonnée.

Ecrire $M(x; y)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) c'est dire que $\overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

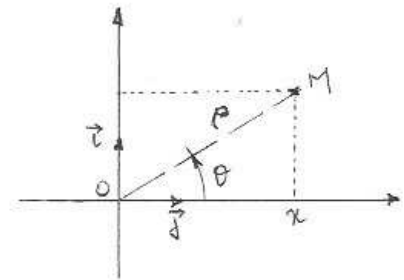
La distance OM est alors telle que, d'après le théorème de Pythagore, $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

Si deux points A et B sont tels que $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ alors :

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ \overline{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} \end{cases}$$

A-II. Coordonnées polaires

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , tout point M peut être repéré par deux nombres réels l'un étant la distance de l'origine O à M , l'autre étant une mesure de l'angle orienté du vecteur \vec{i} au vecteur \overline{OM} . Cet angle du vecteur \vec{i} au vecteur \overline{OM} est appelé angle polaire du point M . Les deux nombres qui décrivent ainsi la position du point M sont souvent notés ρ et θ et sont appelés coordonnées polaires du point M



A partir des coordonnées polaires ρ et θ du point M , il est facile de retrouver les coordonnées cartésiennes du même point... il suffit de projeter pour obtenir :

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos(\theta) \\ y = \rho \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

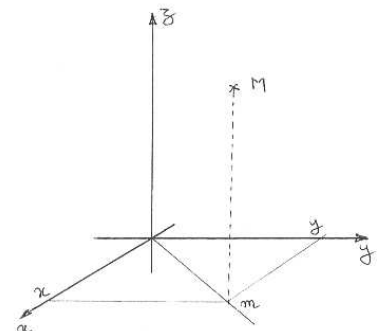
B. Les systèmes de coordonnées dans l'espace

B-I. Coordonnées cartésiennes

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tout point peut être repéré par trois nombres réels appelés abscisse, ordonnée et cote. Attention, c'est bien cote et non pas côte, ni cotte...

Ecrire $M(x; y; z)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ c'est dire que $\overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

La distance OM est alors telle que, d'après le théorème de Pythagore, $OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



Si deux points A et B sont tels que $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$

$$\text{alors : } \begin{cases} AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \\ \vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} \end{cases}$$

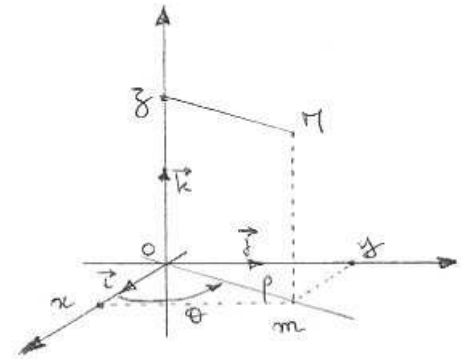
Il est nécessaire de savoir « dessiner » les coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace dans un repère orthonormé.

B-II. Coordonnées cylindriques

La physique faisant souvent apparaître des objets cylindriques (tiges, tubes, tuyaux, fils...) un système de coordonnées a été inventé pour ce type d'objet.

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tout point M peut être repéré par les trois nombres ρ, θ et z définis ci-dessous où m est le projeté orthogonal de M sur le plan xOy :

- on note ρ la distance de l'origine O au point m
- on note θ l'angle du vecteur \vec{i} au vecteur \vec{Om}
- on note z la cote de M



A partir des coordonnées cylindriques ρ, θ et z du point M , il est facile de retrouver les coordonnées cartésiennes du même point... il suffit encore de projeter pour obtenir :

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos(\theta) \\ y = \rho \cdot \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

B-III. Coordonnées sphériques

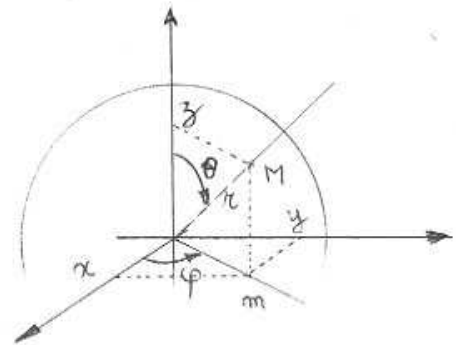
La physique fait aussi souvent apparaître des objets sphériques (boules, sphères, surfaces équipotentielles pour une charge ponctuelle isolée, planètes...) un système de coordonnées a été inventé pour ce type d'objet.

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tout point M peut être repéré par les trois nombres r, θ et φ définis ci-dessous où m est le projeté orthogonal de M sur le plan xOy :

- on note r la distance de l'origine O au point M
- on note θ l'angle du vecteur \vec{k} au vecteur \vec{OM}
- on note φ l'angle du vecteur \vec{i} au vecteur \vec{Om}

A partir des coordonnées sphériques r, θ et φ du point M , il est facile de retrouver les coordonnées cartésiennes du même point... il suffit toujours de projeter pour obtenir :

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ y = r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ z = r \cdot \cos(\theta) \end{cases}$$



C. Le produit scalaire

C-I. Définition et propriétés « géométriques »

Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs du plan ou de l'espace, on appelle produit scalaire de \vec{u} par \vec{v} et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le réel tel que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{u} \text{ ou } \vec{v} \text{ est nul} \\ \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarques :

Cette définition est « intrinsèque » autrement dit elle ne dépend que des vecteurs et de l'unité utilisée mais pas du repère ou de quoi que ce soit d'autre.

Si deux vecteurs ont des normes fixées, leur produit scalaire est...

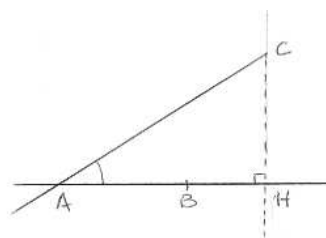
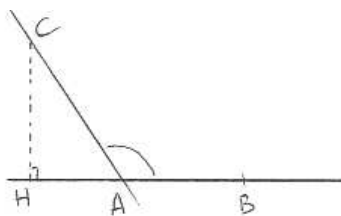
- maximum lorsque $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ vaut 1, c'est à dire lorsque \vec{u} et \vec{v} ont la même direction et le même sens,
- minimum lorsque $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ vaut -1, c'est à dire lorsque \vec{u} et \vec{v} ont la même direction et sont de sens contraires
- nul lorsque $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ vaut 0.

Définition : On dit que deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.

Propriété « projection et mesures algébriques »

Soit trois points A, B et C .

- Si A et B sont confondus, le vecteur \overrightarrow{AB} est nul donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
- Si A et B ne sont pas confondus, on peut projeter C orthogonalement sur la droite (AB) et appeler H le projeté. Dans ces conditions on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$



C-II. Propriétés calculatoires

Quels que soient les vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} du plan ou de l'espace, et les réels a et b , on a toujours :

1. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
4. $a\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot a\vec{v} = a(\vec{u} \cdot \vec{v})$

C-III. Expression en repère orthonormé

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) ,

$$\text{Si on a } \begin{cases} \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} \end{cases} \text{ alors } \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

$$\text{Si on a } \begin{cases} \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} \end{cases} \text{ alors } \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Ces propriétés sont extrêmement simples : il suffit de développer les produits en distribuant...

D. Le produit vectoriel

D-I. Définition et propriétés « géométriques »

Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs du plan ou de l'espace, on appelle produit vectoriel de \vec{u} par \vec{v} et on note $\vec{u} \wedge \vec{v}$ le **vecteur** tel que :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } \vec{u} \text{ ou } \vec{v} \text{ est nul} \\ \vec{w} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{où } \begin{cases} \vec{w} \text{ est orthogonal à } \vec{u} \text{ et à } \vec{v} \\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ détermine un trièdre direct} \\ \|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})| \end{cases}$$

Remarques :

Cette définition est « intrinsèque » autrement dit elle ne dépend que des vecteurs et de l'unité utilisée mais pas du repère ou de quoi que ce soit d'autre.

Si deux vecteurs ont des normes fixées, la **norme** de leur produit vectoriel est...

- maximum lorsque $|\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ vaut 1, c'est à dire lorsque \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux
- nulle lorsque $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ vaut 0, c'est à dire lorsque \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires

D-II. Propriétés calculatoires

Quels que soient les vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} du plan ou de l'espace, et le réel a , on a toujours :

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
2. $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
3. $a\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge a\vec{v} = a(\vec{u} \wedge \vec{v})$

D-III. Expression en repère orthonormé

Remarque préparatoire : Si $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé direct, on a :

$$\begin{aligned} \vec{i} \wedge \vec{j} &= \vec{k}; & \vec{j} \wedge \vec{k} &= \vec{i}; & \vec{k} \wedge \vec{i} &= \vec{j}; \\ \vec{j} \wedge \vec{i} &= -\vec{k}; & \vec{k} \wedge \vec{j} &= -\vec{i}; & \vec{i} \wedge \vec{k} &= -\vec{j}; \end{aligned}$$

L'espace étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

$$\text{Si on a } \begin{cases} \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} \end{cases} \text{ alors } \vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - y'z)\vec{i} + (zx' - z'x)\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}$$

Ici encore, il suffit de développer le produit en distribuant...

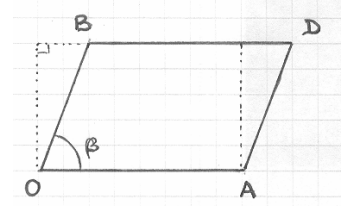
On peut mémoriser facilement ce résultat en utilisant une présentation « en déterminants »...
explication au tableau.

E. Applications aux calculs d'aires, de volumes, de distances

E-I. Aire d'un parallélogramme

L'aire d'un parallélogramme dont deux côtés sont OA et OB est $\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\|$.

C'est immédiat : $Aire = Base \times Hauteur = \|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OB}\| \cdot |\sin(\beta)|$



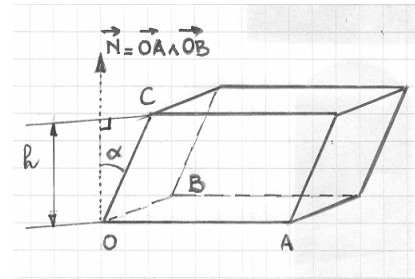
Exemple : On donne, dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $A(1; -1; 2)$ et $B(-2; 1; 5)$, quelle est l'aire du parallélogramme $(OADB)$?... et celle du parallélogramme $(OABC)$?... et celle du triangle (OAB) ?

E-II. Volume d'un parallélépipède

Le volume d'un parallélépipède dont trois arêtes sont OA, OB et OC est $\left| (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} \right|$.

Pas difficile :

$Volume = AireDeBase \times Hauteur = \|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\| \cdot \|\overrightarrow{OC}\| \cdot |\cos(\alpha)|$



Exemple : On donne, dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $A(1; -1; 2)$, $B(-2; 1; 5)$ et $C(1; 0; 2)$, quelle est l'aire du pavé dont trois arêtes sont OA, OB, OC ?

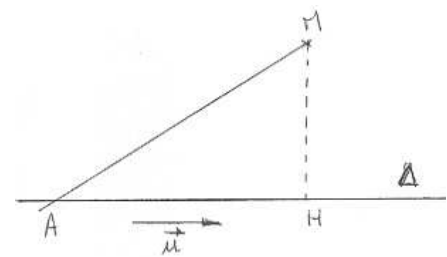
E-III. Distance d'un point à une droite

Si Δ est une droite passant par A et dirigée par \vec{u} , et si M est un point quelconque, la distance de M à Δ est $d(M, \Delta) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

Un peu moins évident : Si on appelle H le projeté orthogonal de M sur Δ , on a :

$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}$ d'où l'égalité des normes :

$\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{HM}\| \cdot \|\vec{u}\|$ et comme la distance de M à Δ est $\|\overrightarrow{HM}\|$...



Exemple : On donne, dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $A(1; -1; 2)$, $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$M(-2; 1; 5)$. Quelle est la distance de M à la droite passant par A et dirigée par \vec{u} ?

E-IV. Distance d'un point à un plan

Si P est le plan défini par les trois points A, B et C (non-alignés) et si M est un point

quelconque, la distance de M à P est
$$d(M, P) = \frac{|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM}|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$$

Cela revient à écrire que $d(M, P) = \text{HauteurDuParallélépipède} = \frac{\text{Volume}}{\text{AireDeBase}}$

Exemple : On donne, dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $A(1; -1; 2)$ $B(-2; 1; 5)$ et $C(2; 1; -1)$. Quelle est la distance de $M(1; 1; 1)$ au plan (ABC) ?

E-V. Equation d'un plan

Si $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé et si P est le plan défini par les trois points A, B et C (non-alignés) pour que $M(x, y, z)$ soit un point de P , il faut et il suffit que $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

Exemple : On donne, dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $A(1; -1; 2)$ $B(-2; 1; 5)$ et $C(1; 0; -2)$. Former une équation du plan (ABC) .

Propriétés remarquables :

- Tout plan a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où au moins l'un des réels a, b, c n'est pas nul.
- Si un plan a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, le vecteur $\vec{V} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan.
- Si un plan a pour équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, ce plan passe par les points $A(a; 0; 0); B(0; b; 0); C(0; 0; c)$



E-VI. Coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan

Soit P un plan passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et orthogonal au vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On cherche les coordonnées (x, y, z) du projeté orthogonal H d'un point $M(x_M, y_M, z_M)$ sur P . A priori, le point H ayant trois coordonnées, il y a trois inconnues... disons (x, y, z) .

Comme \overrightarrow{MH} est orthogonal à P il doit être colinéaire à \vec{n} : $\overrightarrow{MH} = t \cdot \vec{n}$ permet d'exprimer les coordonnées de H en fonction de t et il n'y a plus qu'une inconnue.

Comme \overrightarrow{AH} est orthogonal à \vec{n} on a $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = 0$... ce qui se traduit par une équation à une seule inconnue t . On résout et on remplace t par sa valeur dans les expressions de (x, y, z)

Exercice :

On donne $A(1, -1, 2)$ $B(0, 3, -1)$ $C(-2, 0, 1)$. Quelles sont les coordonnées du point H projeté orthogonal de l'origine sur le plan ABC ? Quelles sont celles du point I projeté orthogonal de A sur le plan BOC ?

E-VII. Coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit D une droite passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On cherche les coordonnées (x, y, z) du projeté orthogonal H d'un point $M(x_M, y_M, z_M)$ sur D .

A priori, le point H ayant trois coordonnées, il y a trois inconnues... disons (x, y, z) .

Comme \overline{AH} est colinéaire à \vec{u} , $\overline{AH} = t\vec{u}$ ce qui permet d'exprimer les coordonnées de H en fonction de t et il n'y a plus qu'une inconnue.

Comme \overline{MH} est orthogonal à \vec{u} on a $\overline{MH} \cdot \vec{u} = 0$... ce qui se traduit par une équation à une seule inconnue t . On résout et on remplace t par sa valeur dans les expressions de (x, y, z)

Exercice :

On donne $A(1, -1, 2)$ $B(0, 3, -1)$ $C(-2, 0, 1)$. Quelles sont les coordonnées du point H projeté orthogonal de C sur la droite (AB) ? Quelles sont celles du point I projeté orthogonal de O sur la droite (AC) ?

