

## Quelques notions vues au collège et en seconde

(complément destiné au travail personnel : non traité en amphi)

### A. Résumé simplifié sur la zoologie des nombres

#### A-I. Les entiers

Notation : L'ensemble des entiers naturels est noté  $\mathbb{N}$ , l'ensemble des entiers relatifs (ou algébriques) est noté  $\mathbb{Z}$ .

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots\} \quad \text{et} \quad \mathbb{Z} = \{\dots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

Bien que ce soit la première notion de nombre ressentie et enseignée, c'est certainement la plus délicate à définir mathématiquement. C'est le problème des premiers mots : comment définir le premier mot d'un langage puisqu'on ne dispose pas d'autres mots pour le définir ? Supposons donc que les nombres entiers – naturels comme relatifs – soient des notions déjà définies et que l'utilisation de la numération de position soit acquise.

#### A-II. Les décimaux

Notation : L'ensemble des décimaux est noté  $\mathbb{D}$

##### 1. Ecriture décimale

Un nombre décimal est un nombre dont l'écriture décimale se fait avec un nombre fini de chiffres (et éventuellement un signe + ou -).

Quelques exemples :

- 3 est décimal : il s'écrit avec un seul chiffre
- 0,33 est décimal : il s'écrit avec trois chiffres
- $\frac{1}{6}$  n'est pas décimal : il s'écrit 0,16666666... ce qui utilise une infinité de chiffres

##### 2. Ecriture fractionnaire

Puisqu'un nombre décimal s'écrit avec un nombre fini de chiffres, il peut toujours s'écrire comme une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10... et si on peut simplifier cette fraction, alors le dénominateur obtenu aura une décomposition en produit de nombres premiers de la forme  $2^p \cdot 5^q$  où  $p$  et  $q$  sont des entiers naturels.

#### A-III. Les rationnels

Notation : L'ensemble des rationnels est noté  $\mathbb{Q}$  (c'est l'initiale de quotient)

##### 1. Quotients d'entiers

On appelle nombre rationnel tout nombre qui est le quotient exact de deux entiers.

Quelques exemples :

- 0,75 est le quotient exact de 3 par 4 donc c'est un rationnel
- 1 est le quotient exact de 1 par 1 donc c'est aussi un rationnel
- le quotient exact de 1 par 3 n'est pas un décimal... mais c'est un rationnel, on le note  $\frac{1}{3}$

Plus généralement, tous les entiers sont des rationnels et tous les décimaux aussi

##### 2. Ecriture décimale des rationnels

Soient deux entiers  $a$  et  $b$  (avec  $b \neq 0$ ), et le rationnel  $\frac{a}{b}$ . Lorsqu'on pose la division de  $a$  par  $b$ , à chaque étape le reste obtenu est inférieur strictement au diviseur... donc il n'y a

que  $b$  valeurs différentes possibles pour le reste... donc la division soit « tombe juste » soit recommence périodiquement avec la même suite de chiffres.

On est donc certain que l'écriture d'un rationnel ne peut faire apparaître après la virgule qu'une suite de chiffres finie ou périodique à partir d'un certain rang.

Réciproquement, en résolvant une équation simple (une inconnue et 1<sup>er</sup> degré) on montre que toute écriture décimale dont la suite de chiffres après la virgule est soit finie soit périodique à partir d'un certain rang correspond à un rationnel.

### 3. Exemple de réécriture

Retrouver l'écriture fractionnaire de  $0,214214\overline{214}...$

On surligne la partie périodique  
(celle qui se répète infiniment)

On pose  $x = 0,214214\overline{214}...$  et on en déduit  $1000.x = 214 + 0,214214\overline{214}...$  c'est à dire  $1000.x = 214 + x$  dont la solution est  $x = \frac{214}{999}$ .

### 4. Exercices de réécriture

Retrouver l'écriture fractionnaire de chacun des nombres suivants :

$$x = 1,214\overline{214} \quad ; \quad y = 21,4214\overline{214} \quad ; \quad z = 5,0214\overline{214}$$

## A-IV. Les réels

L'ensemble des réels est noté  $\mathbb{R}$ .

On distingue les réels positifs et les réels négatifs :  $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$

L'ensemble des réels non-nuls est noté  $\mathbb{R}^*$

#### 1. Définition intuitive

On dit qu'un nombre est réel lorsqu'on peut trouver un objet réel dont la mesure est la valeur absolue de ce nombre.

Par exemple,  $\pi$  est réel parce que la circonférence d'un cercle de diamètre 1 est  $\pi$ .

De même,  $\sqrt{2}$  est réel parce que la diagonale d'un carré de côté 1 mesure  $\sqrt{2}$ .

On montre facilement en utilisant Pythagore que la racine carrée de tout entier est un réel.

#### 2. Rappels sur les opérations entre réels (somme et différence, produit et quotient)

On rappelle les propriétés élémentaires de l'addition :

- Le résultat d'une addition s'appelle une somme.
- La somme de deux réels de même signe est un réel du même signe et sa valeur absolue est la somme des deux valeurs absolues.
- La somme de deux réels de signes différents est du signe de celui des deux nombres qui a la plus grande valeur absolue, et sa valeur absolue est l'écart entre les deux valeurs absolues.

On rappelle de même les propriétés élémentaires de la multiplication :

- Le résultat d'une multiplication s'appelle un produit.
- Le produit de deux réels de même signe est positif et sa valeur absolue est le produit des deux valeurs absolues.
- Le produit de deux réels de signes différents est négatif et sa valeur absolue est le produit des deux valeurs absolues

#### 3. Notion d'encadrement

Tout nombre réel peut être encadré par des décimaux (donc par des rationnels), cet encadrement ayant une largeur aussi petite qu'on puisse le souhaiter.

Par exemple, on peut encadrer  $\sqrt{2}$  par des décimaux aussi précisément qu'on peut le souhaiter :

$$\begin{array}{ll}
1 < \sqrt{2} < 2 & \text{largeur}=1 \\
1,4 < \sqrt{2} < 1,5 & \text{largeur}=0,1 \\
1,41 < \sqrt{2} < 1,42 & \text{largeur}=0,01
\end{array}$$

... etc.

Cela suppose d'avoir convenablement compris comment fonctionne les inégalités « < » et « ≤ »

On rappelle tout d'abord que  $x \leq y$  signifie  $y - x \in \mathbb{R}_+$  et que  $x < y$  signifie  $y - x \in \mathbb{R}_+^*$  et on démontre ensuite toutes les propriétés usuelles.

- si on a  $x \leq y$  alors, quel que soit  $k$ , on a  $k + x \leq k + y$
- si on a  $\begin{cases} x \leq y \\ k \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$  alors on a  $kx \leq ky$  ... mais si on a  $\begin{cases} x \leq y \\ k \in \mathbb{R}_- \end{cases}$  alors on a  $ky \leq kx$  ...

Exemple d'une conséquence pas si évidente que ça... montrons que dans  $\mathbb{R}_+$   $x \leq y$  équivaut à  $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$

- Dans le sens  $x \leq y \Rightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ . On part de l'hypothèse  $x \leq y$  c'est à dire  $y - x \in \mathbb{R}_+$  ou encore  $(\sqrt{y})^2 - (\sqrt{x})^2 \in \mathbb{R}_+$  ce qui se factorise en  $(\sqrt{y} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{y} + \sqrt{x}) \in \mathbb{R}_+$  et comme on sait déjà que  $(\sqrt{y} + \sqrt{x}) \in \mathbb{R}_+$  on en déduit que  $(\sqrt{y} - \sqrt{x}) \in \mathbb{R}_+$  c'est à dire finalement  $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$
- Dans le sens  $\sqrt{x} \leq \sqrt{y} \Rightarrow x \leq y$ . On part de l'hypothèse  $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$  c'est à dire  $(\sqrt{y} - \sqrt{x}) \in \mathbb{R}_+$  et comme on sait déjà que  $(\sqrt{y} + \sqrt{x}) \in \mathbb{R}_+$ , en multipliant on obtient  $(\sqrt{y} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{y} + \sqrt{x}) \in \mathbb{R}_+$  ce qui revient bien à  $(\sqrt{y})^2 - (\sqrt{x})^2 \in \mathbb{R}_+$  autrement dit...  $x \leq y$ .

- si on a  $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases}$  alors on a toujours  $a + c \leq b + d$
- si on a  $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases}$  **et si tous ces nombres sont positifs**, alors on a aussi  $ac \leq bd$

La démonstration de cette dernière propriété (valable pour des nombres positifs) est instructive :

Partons de  $a \leq b$  et multiplions par  $c$ , on obtient  $ac \leq bc$ . Repartons alors de  $c \leq d$  et multiplions par  $b$ , on obtient cette fois  $bc \leq bd$ . On a donc à la fois  $ac \leq bc$  et  $bc \leq bd$  : par transitivité, on obtient  $ac \leq bd$

Ces propriétés fondamentales étant assimilées le résumé suivant sur les encadrements devient plus facile à mémoriser parce qu'il devient compréhensible !

## B. Rappel sur les encadrements dans $\mathbb{R}$

### B-I. Vocabulaire

On dit que  $x$  est encadré par  $a$  et  $b$  lorsqu'on a  $a \leq x \leq b$ .

Les nombres  $a$  et  $b$  sont les bornes de l'encadrement.

Le nombre  $b - a$  est appelé largeur ou diamètre de l'encadrement.

## B-II. Propriétés « à un encadrement »

- On peut toujours ajouter (ou retirer) un même nombre réel aux trois termes d'un encadrement sans changer d'ordre.

$$\text{Si } a \leq x \leq b \text{ alors } a+k \leq x+k \leq b+k$$

- On peut multiplier par un même nombre réel positif les trois termes d'un encadrement sans changer d'ordre.

$$\text{Si } a \leq x \leq b \text{ et } k \geq 0 \text{ alors } ak \leq xk \leq bk$$

- On peut multiplier les trois termes d'un encadrement par un nombre négatif en changeant l'ordre des bornes.

$$\text{Si } a \leq x \leq b \text{ et } k \leq 0 \text{ alors } bk \leq xk \leq ak$$

$$\text{Conséquence immédiate : Si } a \leq x \leq b \text{ alors } -b \leq -x \leq -a$$

- Si les trois termes d'un encadrement sont tous de même signe, on peut inverser (attention : l'inverse de  $a$  c'est  $\frac{1}{a}$ ) ces termes en changeant l'ordre des bornes.

$$\text{Si } a \leq x \leq b \text{ et, soit } a > 0 \text{ soit } b < 0 \text{ alors } \frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$$

## B-III. Propriétés « à deux encadrements »

- On peut toujours additionner membre à membre des encadrements.

$$\text{Si } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \text{ alors } a+c \leq x+y \leq b+d$$

- On ne peut jamais soustraire membre à membre des encadrements... par contre on peut additionner l'opposé.

$$\text{Si } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \text{ alors on a } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ -d \leq -y \leq -c \end{cases} \text{ donc par addition } a-d \leq x-y \leq b-c$$

- On peut multiplier membre à membre les termes de deux encadrements à condition que tous les termes des deux encadrements soient positifs.

$$\text{Si } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a \geq 0 \\ c \geq 0 \end{cases} \text{ alors } ac \leq xy \leq bd$$

- On ne peut jamais diviser membre à membre deux encadrements... par contre on peut multiplier membre à membre le premier par l'inverse du second sous réserve que tous les nombres utilisés soient positifs.

$$\text{Si } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a \geq 0 \\ c > 0 \end{cases} \text{ alors on a } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \frac{1}{d} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{c} \end{cases} \text{ donc } \frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$$

## C. Exercices d'encadrement

### C-I. Quelques cas simples ou moins simples

On donne des encadrements de  $x$  et  $y$  :  $\begin{cases} 2 < x < 4 \\ 3 < y < 8 \end{cases}$ , en déduire les encadrements de :

$$x+y ; \quad x-y ; \quad 5x+2y ; \quad \frac{x+y}{x-2y}$$

$$x^2 + y \quad ; \quad -xy \quad ; \quad 5x - 2y \quad ; \quad \frac{1 + x^2 - y^2}{-x^2 - xy}$$

**C-II. Et un cas très typique...**

On donne des encadrements de  $x$  et  $y$  : 
$$\begin{cases} -1 < x < -\frac{1}{2} \\ 3 < y < 4 \end{cases}$$

Comparer les encadrements des nombres suivants en calculant pour chacun la largeur de l'encadrement obtenu en respectant l'écriture donnée :

$$(x + y)^2 \text{ et } (x^2 + 2xy + y^2) \quad ; \quad (x - y)^2 \text{ et } (x^2 - 2xy + y^2)$$

$$(2x + y)^2 \text{ et } (4x^2 + 4xy + y^2) \quad ; \quad (x - 3y)^2 \text{ et } (x^2 - 6xy + 9y^2)$$

La conclusion de cet exercice, c'est que la largeur de l'encadrement obtenu dépend de la façon de conduire le calcul. En général le calcul le plus court donne les meilleurs résultats c'est-à-dire l'encadrement le plus étroit. En physique c'est fondamental : on utilise des mesures qui, comme toutes les mesures, sont entachées d'erreur. Cela signifie qu'en fait on travaille sur des encadrements même si on ne le dit pas toujours, et que, suivant la façon de conduire les calculs, on atteindra une précision plus ou moins bonne.

En physique, il faut à la fois être un bon « manipulateur » et aussi savoir ne pas gâcher ses résultats par des calculs conduits à la « va comme j'te pousse ».

