

Equations différentielles du second ordre (cas linéaire à coefficients constants)

A. Principes généraux

A-I. La forme de ces équations et de leurs solutions

Elles sont toutes de la forme $a.y''+b.y'+c.y=d(x)$ où a,b,c sont des constantes et $d(x)$ une fonction de x . L'inconnue est la fonction y supposée deux fois dérivable par rapport à la variable x .

Lorsque le second membre est nul pour tout x , on dira que l'équation est Sans Second Membre (ESSM), sinon on dit que l'équation est Avec Second Membre (EASM)

L'expérience acquise pour les équations linéaires du premier ordre conduit aux propriétés suivantes, qui bien entendu se démontrent mais que nous admettrons ici :

1. Les solutions de l'ESSM se comportent comme les vecteurs d'un plan : si y_1 et y_2 sont deux solutions, alors $\alpha y_1 + \beta y_2$ en est une aussi... donc si on trouve deux solutions y_1 et y_2 non colinéaires, c'est à dire non proportionnelles, toutes les solutions de l'ESSM sont de la forme $\alpha y_1 + \beta y_2$: $SG(ESSM) : y = \alpha y_1 + \beta y_2$

2. Les solutions de l'EASM s'obtiennent toutes en additionnant une solution quelconque (ou particulière) de cette EASM avec la solution générale de l'ESSM :

$$\boxed{SG(EASM) = SP(EASM) + SG(ESSM)}$$

3. Si le second membre est une somme, on peut rechercher des solutions particulières pour chaque terme de la somme, puis additionner ces solutions pour obtenir une solution globale de l'EASM : $SP(EASM) = SP(EASM_1) + SP(EASM_2) + SP(EASM_3) + \dots$

A-II. La forme des solutions de l'ESSM

On cherche des solutions de la forme e^{rx} parce que les équations du 1^{er} ordre ont montré que c'était une forme classique... Si $y = e^{rx}$ alors l'équation $a.y''+b.y'+c.y=0$ devient $ar^2 + br + c = 0$ (qu'on appelle équation caractéristique : EC) et on en déduit que le discriminant de $ar^2 + br + c$ permet de distinguer différents cas.

- Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles distinctes pour l'EC : $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Ces deux valeurs de r permettent d'obtenir deux fonctions non-proportionnelles $e^{r_1 x}$ et $e^{r_2 x}$ qui sont solutions de l'ESSM donc toutes les solutions de l'ESSM sont des combinaisons linéaires de ces solutions :

$$\boxed{SG(ESSM) : y = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}}$$

- Si $\Delta = 0$, deux solutions réelles confondues pour l'EC : $r_1 = r_2 = r = \frac{-b}{2a}$.

Puisqu'on obtient deux fois la même valeur de r on n'obtient pas deux fonctions non-proportionnelles qui sont solutions de l'ESSM mais une seule : e^{rx} ... On essaye alors d'utiliser comme solution $x e^{rx}$... et on observe que c'est effectivement une solution. Comme e^{rx} et $x e^{rx}$ ne sont pas proportionnelles, toutes les solutions de l'ESSM sont des combinaisons linéaires de ces solutions :

$$\boxed{SG(ESSM) : y = \alpha x e^{rx} + \beta e^{rx} = (\alpha x + \beta).e^{rx}}$$

- Si $\Delta < 0$, deux solutions complexes distinctes pour l'EC : $r_1 = \frac{-b - j\delta}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b + j\delta}{2a}$ où $(j\delta)^2 = \Delta$. On remarque que r_1 et r_2 sont des conjugués...

On en déduit deux solutions à valeurs complexes $e^{r_1 \cdot x}$ et $e^{r_2 \cdot x}$ puis deux solutions à valeurs réelles en utilisant les formules d'Euler :

$$y_1 = \frac{e^{r_1 \cdot x} + e^{r_2 \cdot x}}{2} = e^{\frac{-b}{2a} \cdot x} \cdot \cos\left(\frac{\delta}{2a} x\right) \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{e^{r_1 \cdot x} - e^{r_2 \cdot x}}{2j} = e^{\frac{-b}{2a} \cdot x} \cdot \sin\left(\frac{\delta}{2a} x\right)$$

En résumé pour ce cas, si on note p et q respectivement la partie réelle et la partie imaginaire d'une solution de l'EC (c'est à dire $p = \frac{-b}{2a}$ et $q = \frac{\delta}{2a}$) on a :

$$\text{SG(ESSM)} : y = e^{p \cdot x} (\alpha \cdot \cos(qx) + \beta \cdot \sin(qx))$$

ce qui peut aussi s'écrire $y = e^{p \cdot x} (A \cdot \cos(Bx + \varphi))$ comme on l'a vu en début de semestre.

A-III. La forme des solutions de l'EASM

Suivant la forme du second membre, les solutions sont à rechercher sous une forme ou sous une autre... En notant $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ des polynômes de degré n :

a. Second membre $P_n(x)$

On cherche une solution polynôme en adaptant le degré au second membre... on réécrit l'équation en utilisant ce polynôme et on identifie...

b. Second membre $e^{kx} \cdot P_n(x)$

Si k est racine d'ordre λ de l'EC ($\lambda = 0, 1$ ou 2) on cherche une solution de la forme :

$$y = x^\lambda \cdot e^{kx} \cdot Q_n(x)$$

Attention à bien comprendre ici que $Q_n(x)$ a le même degré que $P_n(x)$ mais que ce n'est pas le même polynôme !

c. Second membre $\cos(kx) \cdot P_n(x)$ ou $\sin(kx) \cdot P_n(x)$

Si jk est racine d'ordre λ de l'EC ($\lambda = 0$ ou 1), on cherche une solution sous la forme :

$$y = x^\lambda \cdot (Q_n(x) \cdot \cos(kx) + R_n(x) \cdot \sin(kx))$$

Pourquoi donc cette fois utilise-t-on jk et non pas k ? Parce que les cosinus et les sinus proviennent du regroupement de termes de la forme e^{jkx} et que donc ce qui compte c'est de savoir si e^{jkx} faisait partie des solutions de l'ESSM ou non.

A-IV. Conditions à l'origine

Pour déterminer, parmi les solutions d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, celle qui convient à un problème physique précis, on doit utiliser deux conditions... Par exemple, dans le cas rudimentaire où on connaît la dérivée seconde d'une fonction, si on intègre sans condition on voit apparaître deux constantes d'intégration, la première pour la dérivée première et la deuxième pour la fonction.

$$y'' = k \text{ donne } y' = kx + C_1 \text{ puis } y = \frac{1}{2} kx^2 + C_1 x + C_2$$

Classiquement les conditions sont les valeurs de $y'(0)$ et de $y''(0)$... c'est-à-dire C_1 et C_2 .

B. Exemples

B-I. Résolution de $3y'' + y' - 4y = x^2$

ESSM : $3y'' + y' - 4y = 0$ donne EC : $3r^2 + r - 4 = 0$ d'où $\Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2$

$$\text{SG(ESSM)} : y = \alpha.e^{\frac{4}{3}x} + \beta.e^x$$

EASM : On cherche une solution polynôme de degré 2...

$$\text{SP(EASM)} : y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{13}{32}$$

Et en regroupant : $\text{SG(EASM)} : y = \alpha.e^{\frac{4}{3}x} + \beta.e^x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{13}{32}$

B-II. Résolution de $3y'' + y' - 4y = e^{2x}$

ESSM : $3y'' + y' - 4y = 0$ donne EC : $3r^2 + r - 4 = 0$ d'où $\Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2$

$$\text{SG(ESSM)} : y = \alpha.e^{\frac{4}{3}x} + \beta.e^x$$

EASM : On cherche une solution $Q_0(x).e^{2x}$...

$$\text{SP(EASM)} : y = \frac{1}{10}.e^{2x}$$

Et en regroupant : $\text{SG(EASM)} : y = \alpha.e^{\frac{4}{3}x} + \beta.e^x + \frac{1}{10}.e^{2x}$

B-III. Résolution de $3y'' + y' - 4y = xe^{2x}$

ESSM : $3y'' + y' - 4y = 0$ donne EC : $3r^2 + r - 4 = 0$ d'où $\Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2$

$$\text{SG(ESSM)} : y = \alpha.e^{\frac{4}{3}x} + \beta.e^x$$

EASM : On cherche une solution $Q_1(x).e^{2x}$...

$$\text{SP(EASM)} : y = \left(\frac{1}{10}x - \frac{13}{100} \right).e^{2x}$$

Et en regroupant : $\text{SG(EASM)} : y = \alpha.e^{\frac{4}{3}x} + \beta.e^x + \left(\frac{1}{10}x - \frac{13}{100} \right).e^{2x}$

B-IV. Résolution de $3y'' + y' - 4y = e^x$

ESSM : $3y'' + y' - 4y = 0$ donne EC : $3r^2 + r - 4 = 0$ d'où $\Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2$

$$\text{SG(ESSM)} : y = \alpha.e^{\frac{4}{3}x} + \beta.e^x$$

EASM : On cherche une solution $x.Q_0(x).e^{2x}$...

$$\text{SP(EASM)} : y = \left(\frac{1}{7}x \right).e^x$$

Et en regroupant : $\text{SG(EASM)} : y = \alpha.e^{\frac{4}{3}x} + \beta.e^x + \left(\frac{1}{7}x \right).e^x$

B-V. Résolution de $3y'' + y' - 4y = xe^x$

ESSM : $3y'' + y' - 4y = 0$ donne EC : $3r^2 + r - 4 = 0$ d'où $\Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2$

$$\text{SG(ESSM)} : y = \alpha.e^{\frac{4}{3}x} + \beta.e^x$$

EASM : On cherche une solution $x.Q_1(x).e^{2x} \dots$

$$\text{SP(EASM)} : y = \left(\frac{1}{14}x^2 - \frac{3}{49}x \right).e^x$$

Et en regroupant : SG(EASM) : $y = \alpha.e^{\frac{4}{3}x} + \beta.e^x + \left(\frac{1}{14}x^2 - \frac{3}{49}x \right).e^x$

B-VI. Résolution de $3y'' + y' - 4y = \sin(x)$

ESSM : $3y'' + y' - 4y = 0$ donne EC : $3r^2 + r - 4 = 0$ d'où $\Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2$

$$\text{SG(ESSM)} : y = \alpha.e^{\frac{4}{3}x} + \beta.e^x$$

EASM : On cherche une solution $x^0.(Q_0(x).\cos(x) + R_0(x).\sin(x)) \dots$ c'est à dire de la forme $A.\cos(x) + B.\sin(x)$

$$\text{SP(EASM)} : y = -\frac{1}{50}\cos(x) - \frac{7}{50}\sin(x)$$

Et en regroupant : SG(EASM) : $y = \alpha.e^{\frac{4}{3}x} + \beta.e^x - \frac{1}{50}\cos(x) - \frac{7}{50}\sin(x)$

B-VII. Résolution de $3y'' + y' - 4y = -x.\sin(x)$

ESSM : $3y'' + y' - 4y = 0$ donne EC : $3r^2 + r - 4 = 0$ d'où $\Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2$

$$\text{SG(ESSM)} : y = \alpha.e^{\frac{4}{3}x} + \beta.e^x$$

EASM : On cherche une solution $x^0.(Q_1(x).\cos(x) + R_1(x).\sin(x)) \dots$ c'est à dire de la forme $(Ax + B).\cos(x) + (Cx + D).\sin(x)$

$$\text{SP(EASM)} : y = \left(\frac{1}{50}x + \frac{151}{1250} \right).\cos(x) + \left(\frac{7}{50}x - \frac{9}{625} \right).\sin(x)$$

Et en regroupant : SG(EASM) : $y = \alpha.e^{\frac{4}{3}x} + \beta.e^x + \left(\frac{1}{50}x + \frac{151}{1250} \right).\cos(x) + \left(\frac{7}{50}x - \frac{9}{625} \right).\sin(x)$

B-VIII. Résolution de $y'' + 2y' + y = e^{2x}$

ESSM : $y'' + 2y' + y = 0$ donne EC : $r^2 + 2r + 1 = 0$ d'où $\Delta = 0$; $r_1 = r_2 = -1$

$$\text{SG(ESSM)} : y = (\alpha x + \beta).e^{-x}$$

EASM : On cherche une solution $x^0.Q_0(x).e^{2x} \dots$ c'est à dire de la forme $A.e^{2x}$

$$\text{SP(EASM)} : y = \frac{1}{9}.e^{2x}$$

Et en regroupant : SG(EASM) : $y = (\alpha x + \beta).e^{-x} + \frac{1}{9}.e^{2x}$

B-IX. Résolution de $y''+2y'+y=e^{-x}$

ESSM : $y''+2y'+y=0$ donne EC : $r^2+2r+1=0$ d'où $\Delta=0$; $r_1=r_2=-1$

$$\text{SG(ESSM)} : y = (\alpha x + \beta).e^{-x}$$

EASM : On cherche une solution $x^2.Q_0(x).e^x$... c'est à dire de la forme $Ax^2.e^{-x}$

$$\text{SP(EASM)} : y = \frac{1}{2}x^2.e^{-x}$$

Et en regroupant : $\text{SG(EASM)} : y = (\alpha x + \beta).e^{-x} + \frac{1}{2}x^2.e^{-x}$

B-X. Résolution de $y''+y'+y=x$

ESSM : $y''+y'+y=0$ donne EC : $r^2+r+1=0$ d'où $\Delta=-3$; $r_1 = \frac{-1-3j}{2}$; $r_2 = \frac{-1+3j}{2}$

$$\text{SG(ESSM)} : y = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(\alpha \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right)$$

EASM : On cherche une solution $Q_1(x)$... c'est à dire de la forme $Ax+B$

$$\text{SP(EASM)} : y = x-1$$

Et en regroupant :

$$\text{SG(EASM)} : y = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(\alpha \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) + x-1$$

B-XI. Résolution de $y''+y'+y=e^x$

ESSM : $y''+y'+y=0$ donne EC : $r^2+r+1=0$ d'où $\Delta=-3$; $r_1 = \frac{-1-3j}{2}$; $r_2 = \frac{-1+3j}{2}$

$$\text{SG(ESSM)} : y = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(\alpha \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right)$$

EASM : On cherche une solution $x^0.Q_0(x).e^x$... c'est à dire de la forme $A.e^x$

$$\text{SP(EASM)} : y = \frac{1}{3}.e^x$$

Et en regroupant :

$$\text{SG(EASM)} : y = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(\alpha \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) + \frac{1}{3}.e^x$$

B-XII. Résolution de $y''-3y'+2y=1+e^x-3\sin(x)$ avec $\begin{cases} y''(0)= \\ y'(0)= \end{cases}$

ESSM : $y''-3y'+2y=0$ donne...

EASM1 : $y''-3y'+2y=1$ donne...

EASM2 : $y''-3y'+2y=e^x$ donne...

EASM3 : $y''-3y'+2y=-3\sin(x)$ donne...

et on regroupe le tout : $y = \frac{1}{2} - (x + C_1)e^x + C_2e^{2x} - \frac{9}{10}\cos(x) - \frac{3}{10}\sin(x)$

C. Conclusion

Une fois traités ces quelques exemples, il est clair que la seule chose à faire pour réussir en Mesures Physiques (et pour prendre un peu d'assurance) c'est d'apprendre par cœur les différents cas qu'on peut rencontrer... et de se ré-entraîner encore et encore.

Chacun sait bien que pour être un bon pianiste, un bon guitariste, un bon violoniste... il faut s'entraîner presque tous les jours. De même, pour être un bon nageur, un bon tennisman, un bon jongleur il faut aussi s'entraîner presque tous les jours.

Les mathématiques, surtout dans leur aspect technique n'échappent pas à cette règle de l'entraînement : pour être un bon étudiant en mathématiques à l'IUT il faut, comme pour les autres activités humaines s'entraîner, presque tous les jours... et ce n'est possible que si on aime un peu ça. Il est donc très important pour chacun de tester sa motivation !

Sans vouloir en rajouter, il est certain que ceux qui réviseront un peu avant d'entamer leur 2^{ème} semestre seront très avantagés par rapport aux autres ! Ceux qui comptent sur une poursuite d'études doivent bien comprendre qu'ils ne peuvent pas s'en dispenser.

Quant à ceux qui vont recommencer, qu'ils sachent que ce n'est pas gagné d'avance et que tout ce qui sera acquis avant de recommencer sera une charge de travail en moins.