

## Notion d'équation différentielle : Équations du 1<sup>er</sup> ordre

### A. De quoi s'agit-il ?

#### A-I. Exemples tirés de la géométrie

##### a. Avec tangente et abscisse...

On suppose que  $f$  est une fonction de la variable  $x$  et que  $C$  est sa présentation graphique dans un repère orthonormé. Quelle peut être cette fonction si la tangente en tout point de  $C$  a pour coefficient directeur l'abscisse de ce point ?

La question posée revient à chercher les fonctions telles que  $f'(x) = x \dots$  On en connaît une, c'est la fonction  $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ .

On peut en déduire une famille de fonctions qui conviennent :  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + Cste$ .

La question qui reste à résoudre c'est de savoir si ce sont les seules !

##### b. Avec tangente, abscisse et ordonnée...

On suppose que  $f$  est une fonction de la variable  $x$  et que  $C$  est sa présentation graphique dans un repère orthonormé. Quelle peut être cette fonction si la tangente en tout point de  $C$  a pour coefficient directeur la moyenne entre l'abscisse et l'ordonnée de ce point ?

Cette fois on cherche les fonctions telles que  $f'(x) = \frac{f(x) + x}{2}$  c'est à dire telles que  $f(x) - 2.f'(x) = -x \dots$

Il n'est pas très difficile de trouver une solution ( $f(x) = -x - 2$  convient) mais comment en trouver d'autres et comment être sûr qu'on les a toutes ?

##### c. Avec tangente et angle fixe...

On suppose que  $x$  et  $y$  sont deux variables liées et que  $C$  est la courbe (ou le réseau de courbes) formée des points de coordonnées  $x$  et  $y$ . Quel peut être le lien entre  $x$  et  $y$  si la tangente en tout point  $M$  de  $C$  fait un angle de  $30^\circ$  avec  $(OM)$  ?

La mise en équation est moins simple mais il est probable qu'elle devra faire intervenir  $\frac{dy}{dx}, x, y \dots$  et que par conséquent l'équation soit de la forme  $\mathfrak{F}(\frac{dy}{dx}, y, x) = 0$ . En trouver une solution est alors de moins en moins simple, être sûr qu'on les a toutes devient vraiment problématique.

#### A-II. Notions générales

##### a. Forme générale d'une équation différentielle.

On suppose que  $y$  est une fonction inconnue de la variable  $x$ . On appelle équation différentielle d'inconnue  $y$  et de variable  $x$  toute équation de la forme  $\mathfrak{F}(x, y, y', y'', y'''\dots y^{(n)}) = 0$  où  $\mathfrak{F}$  est une fonction quelconque et  $y^{(n)}$  désigne la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de  $y$ .

Par exemple, voici quelques équations différentielles et leur forme « standard » :

1.  $y'' + 2y' = \cos(x)$                        $y'' + 2y' - \cos(x) = 0$
2.  $x.y' + 2y.y'' = y^2 + 1$                        $x.y' + 2y.y'' - y^2 - 1 = 0$

$$3. \quad \sin(xy) = \frac{(y')^3}{1+y} \qquad \sin(xy)(1+y) - (y')^3 = 0$$

On appelle solution d'une équation différentielle toute fonction  $f(x)$  qui vérifie l'équation.

Les solutions peuvent ne pas avoir toutes le même ensemble de définition, un problème classique (et pas forcément facile) consiste à rechercher le plus grand domaine dans lequel on puisse trouver une solution, un autre problème est de trouver toutes les solutions.

Résoudre une équation différentielle dans un intervalle choisi, c'est trouver toutes les solutions de cette équation qui sont définies dans cet intervalle.

Remarque : Pour les équations rencontrées jusqu'à présent, qui étaient des équations numériques, les notions de variable et d'inconnue étaient indifférenciées, on employait indifféremment un terme ou l'autre. Avec les équations différentielles il faut bien distinguer les deux notions : l'inconnue est une fonction, la variable n'est pas l'inconnue.

### b. Ordre d'une équation différentielle

On appelle ordre d'une équation différentielle le plus grand des ordres de dérivation qui figurent dans cette équation. Dans les exemples précédents, les cas 1) et 2) sont des équations d'ordre 2 et le cas 3) est une équation d'ordre 1 (on dit aussi du 1<sup>er</sup> ordre).

## B. Les équations du premier ordre : $\mathfrak{F}(x, y, y') = 0$

En notant la dérivée de  $y$  sous la forme  $\frac{dy}{dx}$  les équations du 1<sup>er</sup> ordre peuvent s'écrire

$$\mathfrak{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

### B-I. Equations séparables

#### a. Définition

On dit qu'une équation du 1<sup>er</sup> ordre est séparable lorsqu'elle peut se mettre sous la forme  $a(x).dx = b(y).dy$  où  $a$  et  $b$  sont des fonctions à une seule variable.

#### b. Exemples :

- 1)  $3x + y' = 1$  est séparable en  $dy = (1 - 3x).dx$
- 2)  $3xy' = 1$  est séparable en  $dy = \frac{1}{3x}.dx$
- 3)  $3xy' = y$  est séparable en  $\frac{dy}{y} = \frac{1}{3x}.dx$  sauf si  $y$  est constamment nul.
- 4)  $3xy' = 1 + y^2$  est séparable en  $\frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{3x}.dx$
- 5)  $3x + y' = 1 + y$  n'est pas séparable.
- 6)  $yy' = 1 + x$  est séparable en  $y.dy = (1 + x).dx$

### c. Méthode de résolution

Le principe est très simple à énoncer : On intègre séparément chacun des deux membres de l'équation obtenue en séparant les variables... sans oublier que si deux quantités variables sont égales, leurs intégrales ne sont égales qu'à une constante près.

Exemple 1 : De  $dy = (1-3x).dx$  on déduit  $\int dy = \int (1-3x).dx$  c'est à dire  $y = (x-3\frac{x^2}{2}) + Cste$

Exemple 2 : De  $dy = \frac{1}{3x}.dx$  on déduit  $\int dy = \int \frac{1}{3x}.dx \dots y = \frac{\ln(|x|)}{3} + Cste$

Exemple 3 : Pour  $\frac{dy}{y} = \frac{1}{3x}.dx$  on distingue deux cas :

- soit  $y \equiv 0$  et alors on étudie ce cas particulier... c'est une solution
- soit  $y$  n'est pas constamment nul et, dans les intervalles où elle ne l'est pas, on déduit :

$$\ln(|y|) = \frac{\ln(|x|)}{3} + Cste \dots |y| = \alpha.x^{\left(\frac{1}{3}\right)} \text{ où } \alpha = e^{Cste} \text{ donc } \alpha \text{ est strictement positif.}$$

On peut résumer toutes les solutions par l'écriture unique :  $y = k.x^{\left(\frac{1}{3}\right)}$  où  $k \in \mathbb{R}$

Remarque : Si on demande de résoudre  $dy = \frac{1}{3x}.dx$  dans  $\mathbb{R}_+$  on obtient  $y = \frac{\ln(x)}{3} + Cste$  mais

si on demande de résoudre  $dy = \frac{1}{3x}.dx$  dans  $\mathbb{R}_-$  on obtient  $y = \frac{\ln(-x)}{3} + Cste$

## B-II. Equations linéaires

### a. Forme générale de ces équations...

Une équation du 1<sup>er</sup> ordre est dite linéaire lorsque la fonction inconnue et sa dérivée n'interviennent que séparément et avec l'exposant 1.

Autrement dit elles sont de la forme :  $a(x).y' + b(x).y = c(x)$

où  $a(x)$ ,  $b(x)$  et  $c(x)$  sont des fonctions quelconques de  $x$ .

### b. Cas des équations « sans second membre » : ESSM.

Elles sont de la forme  $a(x).y' + b(x).y = 0$

On démontre successivement que :

- 1) La somme de deux solutions est encore une solution
- 2) Le produit d'une solution par un réel est encore une solution
- 3) Toute combinaison linéaire de solutions est encore une solution
- 4) Les solutions se comportent comme les vecteurs d'une droite vectorielle :

$$\vec{v} \in D(\vec{u}) \Leftrightarrow \vec{v} = k.\vec{u}$$

se traduit par

$$y \in S \text{ (ensemble des solutions)} \Leftrightarrow y = ku \text{ (où } u \text{ est une solution)}$$

- 5) Conclusion : **SG(ESSM)** :  $y = k.e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}.dx}$  où  $k \in \mathbb{R}$ .

### c. Cas des équations « avec second membre » : EASM.

- 1) Notion de solution particulière : **SP(EASM)** .
- 2) Les solutions de l'EASM s'obtiennent toutes en additionnant SP(EASM) et SG(ESSM)
  - Soit  $y_1$  une SP(EASM). Si  $y_2$  en est une autre, alors  $y_2 - y_1$  est solution de l'ESSM. En posant  $y_0 = y_2 - y_1$ , on voit que  $y_2 = y_0 + y_1$  donc  $y_2 = \text{SG(ESSM)} + \text{SP(EASM)}$
  - Réciproquement, si  $y_2 = \text{SG(ESSM)} + \text{SP(EASM)}$  alors  $y_2$  est bien une solution de l'EASM.
- 3) Analogie avec équation vectorielle d'une droite affine :

$$M \in D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k\vec{u} .$$

se traduit par

$$y \in S \text{ (ensemble des solutions)} \Leftrightarrow y = \text{SP(EASM)} + \text{SG(ESSM)}$$

- 4) Conclusion **SG(EASM) = SG(ESSM) + SP(EASM)**.

### d. Comment trouver une SP(EASM) ?

#### d - 1) Méthode heuristique

Si on a la chance d'en trouver une, quelle que soit la façon (honnête) de la trouver, cette solution convient parfaitement !

Exemple : Soit l'équation  $y' + 2y = 4x + 1$ .

On se doute qu'une solution peut être de la forme  $ax + b$  ... c'est à dire que si on pose

$$y = ax + b \text{ l'équation se réécrit : } \begin{array}{l} 2 \mid y = ax + b \\ 1 \mid y' = a \\ \hline 2y + y' = 2ax + a + 2b = 4x + 1 \end{array}$$

$$\text{dont on déduit le système } \begin{cases} 2a = 4 \\ a + 2b = 1 \end{cases} \dots \text{SP(EASM)} : y = 2x - \frac{1}{2}$$

#### d - 2) Méthode de Lagrange

Si la solution générale de l'ESSM est de la forme  $\alpha \cdot s(x)$  alors une solution particulière de l'EASM est de la forme  $\alpha(x) \cdot s(x)$  ... c'est à dire qu'on remplace la constante  $\alpha$  par une fonction  $\alpha(x)$  ... et pour cette raison la méthode de Lagrange est souvent appelée méthode de la variation de la constante - ce qui est une façon de dire pour le moins étrange.

Exemple : Soit l'équation  $x^2 \cdot y' + y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

On obtient sans difficulté SG(ESSM) :  $y = \alpha \cdot e^{\frac{1}{x}}$ .

On cherche donc SP(EASM) sous la forme  $y = \alpha(x) \cdot e^{\frac{1}{x}}$  et on réécrit l'équation :

$$\begin{array}{l} 1 \mid y = \alpha(x) \cdot e^{\frac{1}{x}} \\ x^2 \mid y' = \alpha'(x) \cdot e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} \alpha(x) \cdot e^{\frac{1}{x}} \\ \hline \end{array}$$

ce qui donne  $x^2 y' + y = \alpha'(x) \cdot e^{\frac{1}{x}}$

$$\text{d'où } \alpha'(x) = x \dots \text{ et } \alpha(x) = \frac{x^2}{2} + k .$$

On obtient enfin SP(EASM) :  $y = \left(\frac{x^2}{2} + k\right) \cdot e^{\frac{1}{x}}$  et comme on cherche UNE solution particulière on choisit la constante  $k$  pour qu'elle soit simple... 0 c'est bien !

### B-III. Equations de Bernouilli

Ce sont des équations qui peuvent être rendues linéaires par un changement de variable.

Elles sont de la forme  $a(x).y' + b(x).y = c(x).y^n$  avec  $n \neq 1$ .

On réécrit l'équation :  $a(x) \cdot \frac{y'}{y^n} + b(x).y^{1-n} = c(x)$ .

On pose  $z = y^{1-n}$  ce qui donne  $z' = (1-n)y'.y^{-n} = (1-n) \cdot \frac{y'}{y^n}$ .

L'équation devient  $\frac{a(x)}{1-n} \cdot z' + b(x).z = c(x)$  qui est maintenant linéaire en  $z$  ... On la résout en  $z$  puis on effectue le changement de variable inverse.

Exemple : Résolution de  $x.y' + 2y = (x-1)y^2$ .

❖  $y \equiv 0$  est solution

❖ Sinon, on divise par  $y^2$  ce qui donne  $x \cdot \frac{y'}{y^2} + \frac{2}{y} = (x-1)$  et on pose  $z = \frac{1}{y}$  : l'équation devient  $-xz' + 2z = (x-1)$  ... qui est linéaire en  $z$  ... et donne  $z = kx^2 + x + \frac{1}{2}$

❖ On revient à l'inconnue initiale :  $y = \pm \sqrt{kx^2 + x + \frac{1}{2}}$  ou  $y \equiv 0$

### B-IV. Equations homogènes

Ce sont des équations qui peuvent être rendues séparables par un changement de variable.

Elles sont de la forme  $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$  c'est à dire que ces équations sont invariantes si on multiplie la variable et l'inconnue par le même nombre.

On les résout en posant  $t = \frac{y}{x}$  de sorte que l'inconnue devient  $t$  et qu'on a  $dy = x.dt + t.dx$ .

En remplaçant alors  $\frac{y}{x}$  par  $t$  (ou  $y$  par  $tx$ ) et  $dy$  par  $x.dt + t.dx$  on obtient une équation séparable dont l'inconnue est  $t$  et la variable  $x$ . La résolution de cette équation, compte tenu de la relation  $y = tx$  donne une représentation paramétrique  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = t.x(t) \end{cases}$  des courbes représentant les solutions de l'équation différentielle... On peut parfois en déduire une équation cartésienne...

Exemple : Résolution de  $y^2.y' = x^2$

L'équation se réécrit  $y' = \left(\frac{x}{y}\right)^2$  ... on remplace  $y$  par  $tx$  ... l'équation devient  $tx(x.dt + t.dx) = x + tx$  ... qui se sépare en...

## B-V. Notion de condition initiale

Lorsqu'on précise une valeur particulière de la solution pour une valeur particulière de la variable, on peut déterminer la constante  $k$  donc trouver précisément la fonction cherchée.

Exemple : Résoudre  $yy' = \frac{1}{x}$  sachant que  $y(-1) = 8$ .

Cette équation est séparable et donne...  $y = \pm\sqrt{2 \cdot \ln(|x|) + Cste}$ .

Pour être définie en  $-1$ , on doit avoir  $y = \pm\sqrt{2 \cdot \ln(-x) + Cste}$  et comme le résultat souhaité est positif, on a finalement  $y = +\sqrt{2 \cdot \ln(-x) + Cste}$  où la condition initiale donne  $8 = \sqrt{Cste}$  c'est à dire  $Cste = 64$

La solution cherchée est  $y = \sqrt{2 \cdot \ln(-x) + 64}$  ... et elle est définie dans  $]-\infty; -e^{-32}[$ .

## B-VI. Exemples avec solutions pour s'entraîner

a.  $y' + xy = x$  avec  $y(0) = 2$  ... donne  $y = 1 + k \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$  avec  $k = 1$

b.  $xy' + y = x$  avec  $y(1) = -1$  ... donne  $y = \frac{2k + x^2}{2x}$  avec  $k = -\frac{3}{2}$

c.  $(x+1)y' + y = 1$  ... donne  $y = \frac{k+x}{x+1}$

d. On donne  $y' - \sin(x) \cdot y = 2 \cdot \sin(x)$ . Combien vaut  $y(\pi)$  si  $y(0) = e$  ?

On obtient  $y = -2 + k \cdot e^{-\cos(x)}$  avec  $k = e(e+2)$  donc  $y(\pi) = e^3 + 2e^2 - 2$

e. On donne  $(1+x^2)y' + y = \text{Arctan}(x)$ . Combien vaut  $y(1)$  si  $y(0) = 2$  ?

On obtient  $y = \alpha \cdot e^{-\text{Arctan}(x)} + \text{Arctan}(x) - 1$  avec  $\alpha = 3$  donc ...

## B-VII. Et trois exercices plus originaux pour finir

### a. Problème de continuité

En distinguant trois cas, selon que  $x \in ]-\infty; -2[$  ou  $x \in ]-2; +2[$  ou  $x \in ]+2; +\infty[$ , résoudre l'équation  $y' \cdot (x^2 - 4) + xy = 2$

Peut-on trouver une solution continue pour  $x = 2$  ? ... et continue en tout  $x$  ?

### b. Changement de variable

$P$  est une fonction donnée de  $x$ , à la fois dérivable et intégrable. Montrer qu'en utilisant  $Py$  l'équation  $y'' + Py' + yP' = 0$  se ramène à une équation linéaire du premier ordre.

### c. re-Changement de variable

En posant  $y = x \cdot e^z$ , résoudre l'équation  $y' = \frac{y(x+1)}{x^2} - 2 \frac{y}{x} \ln\left(\frac{y}{x}\right)$

On trouvera d'abord  $z$  puis on en déduira  $y$ .