

## Intégrales triples

### Calcul de volumes et d'hyper-volumes

#### A. Domaine « cubable »

On dit qu'un domaine est cubable quand son volume peut être approché par une subdivision en petits pavés obtenus en partageant l'espace par trois familles de plans, les premiers d'abscisse constante, les seconds d'ordonnée constante et les troisièmes de cote constante... c'est la généralisation à l'espace de la notion de domaine quarrable.

#### B. Expression intégrale du volume d'un domaine cubable

##### B-I. Élément de volume en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes, l'élément de volume est  $dx dy dz$  et le volume d'un domaine  $D$  peut donc se noter  $\iiint_D dx dy dz$  où cette notation montre que le volume s'obtient par trois intégrations successives, l'une pour  $dx$ , l'autre pour  $dy$  et la troisième pour  $dz$ .

##### B-II. Changement de coordonnées

On définit le Jacobien du changement de coordonnées  $(x, y, z) \rightarrow (u, v, w)$  comme l'expression  $J(x, y, z)$  telle que :

$$J(x, y, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Comme pour les intégrales doubles où ce Jacobien permet d'adapter la taille de l'élément de surface au moment d'un changement de coordonnées, il permet ici d'adapter la taille d'un élément de volume :  $dudvdw = |J(x, y, z)| \cdot dx dy dz$  pourvu que dans le domaine considéré le Jacobien garde un signe constant...

a. Cas des **coordonnées cylindriques** : 
$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\theta) \\ y = r \cdot \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

On obtient  $J(r, \theta, z) = r$  donc  $dx dy dz = r \cdot dr d\theta dz$

b. Cas des **coordonnées sphériques** : 
$$\begin{cases} x = r \cdot \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y = r \cdot \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = r \cdot \cos(\theta) \end{cases}$$

On obtient  $J(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin(\theta)$  donc  $dx dy dz = r^2 \cdot \sin(\theta) \cdot dr d\theta d\varphi$

## C. Méthodes de calcul des intégrales triples

### C-I. Intégrales itérées

Si pour  $z$  fixé entre les bornes  $z_{\min}$  et  $z_{\max}$ ,  $y$  varie entre  $y_{\min}(z)$  et  $y_{\max}(z)$  où ces expressions sont des fonctions continues de  $z$  et si de plus pour  $y$  et  $z$  fixés respectivement entre les bornes  $y_{\min}(z)$  et  $y_{\max}(z)$  d'une part et  $z_{\min}$  et  $z_{\max}$  d'autre part,  $x$  varie entre les bornes  $x_{\min}(y,z)$  et  $x_{\max}(y,z)$  où ces expressions sont des fonctions continues de  $y$  et  $z$ , alors :

$$\iiint_D dx dy dz = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left( \int_{y_{\min}(z)}^{y_{\max}(z)} \left( \int_{x_{\min}(y,z)}^{x_{\max}(y,z)} dx \right) dy \right) dz$$

Remarque : Bien entendu cette méthode se décline suivant l'ordre dans lequel il est le plus intéressant d'effectuer les intégrations... En général, on intègre en dernier (intégrale extérieure) suivant la variable dont les bornes sont les plus simples, si possible constantes.

### C-II. Intégrales « en tranches »

Si les coupes du domaine pour  $z$  fixé entre les bornes  $z_{\min}$  et  $z_{\max}$  ont une forme simple (carrés, disques, triangles) on appelle  $D_z$  le domaine où varient  $x$  et  $y$  lorsque  $z$  est choisi et on a :

$$\iiint_D dx dy dz = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left( \iint_{D_z} dx dy \right) dz$$

L'intégrale triple est donc devenue « une intégrale simple d'intégrale double » : on dit qu'on pratiqué une intégration « en tranches ».

### C-III. Intégrales « en piles »

Si la projection du domaine dans le plan  $xOy$  est  $\Delta$  et si pour tout couple  $(x, y)$  choisi dans  $\Delta$  la variable  $z$  varie entre  $z_{\min}(x, y)$  et  $z_{\max}(x, y)$  où ces expressions sont des fonctions continues de  $x$  et  $y$  alors on a :

$$\iiint_D dx dy dz = \iint_{\Delta} \left( \int_{z_{\min}(x,y)}^{z_{\max}(x,y)} dz \right) dx dy$$

L'intégrale triple est devenue « une intégrale double d'intégrale simple » : on dit qu'on a pratiqué une intégration « en piles » ou « en bâtons ».

## D. Généralisation de l'intégrale triple

Si  $f(x, y, z)$  est une fonction continue dans le domaine  $D$ , on peut appliquer la méthode de Riemann au calcul de  $\iiint_D f(x, y, z). dx dy dz \dots$  Cette intégrale ne calcule plus un volume, la dimension physique n'est plus celle d'un volume. Les méthodes de calcul (intégrales itérées, intégrales « en tranches », intégrales « en piles ») restent valables.

## E. Quelques intégrales triples et des applications...

### E-I. Calcul de $I = \iiint_D z. dx dy dz$ dans deux cas "biens pour des tranches"

- 1)  $D$  est le domaine limité par la surface d'équation  $z = 1 - x^2 - y^2$  et le plan  $z = 0$ .
- 2)  $D$  est le domaine limité par la surface d'équation  $x^2 + y^2 = 1$  et les plans  $\begin{cases} z = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ .

**E-II. Calcul de  $I = \iiint_D (x^2 + y^2).dxdydz$  dans deux cas "biens pour des piles"**

- 1)  $D$  est le domaine limité par la surface d'équation  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  et le plan  $z = 0$ .
- 2)  $D$  est le domaine limité par la surface d'équation  $x^2 + y^2 = 1$  et les plans  $\begin{cases} z = -1 - y \\ z = 1 + y \end{cases}$ .

**E-III. Calculs dans des cas où il faut se débrouiller...**

1) L'intégrale  $I$  s'écrit  $\int_0^{2a} \left( \int_0^x \left( \int_y^x xyz.dz \right) dy \right) dx$

- ◆ Préciser le domaine d'intégration
- ◆ Ré-exprimer l'intégrale de cinq autres façons en changeant l'ordre d'intégration
- ◆ Calculer l'intégrale

2) Prouver que  $\iiint_D x.dxdydz = \frac{4}{35}$  avec  $D = \{x + z \leq 1; z \geq 0; x \geq y^2; y \geq 0\}$

3) Prouver que  $\iiint_D z.dxdydz = \frac{11}{60}$  avec  $D = \{x \geq 0; y \geq 0; z \leq 1 - y^2; x + y \leq 1\}$

**F. Notion de centre d'inertie**

**F-I. Rappels**

Barycentre de deux points (cours de 2<sup>nde</sup>) à partir du porteur d'eau et de la condition d'équilibre.

Barycentre de  $n$  points (cours de 1<sup>ère</sup>) à partir de l'équilibre d'une plaque soumise à trois forces verticales et de la condition d'équilibre.

Formule  $\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$  (cours de terminale)

...et son expression en séparant les coordonnées :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot x_{A_i}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}; y_G = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot y_{A_i}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}; z_G = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot z_{A_i}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \end{cases}$$

Généralisation : La masse est répartie dans l'ensemble d'un domaine, on ne peut plus numéroter les points du domaine... La somme discrète est remplacée par une somme continue (une intégrale) où les coefficients sont de la forme  $dm = \rho(x, y, z).dxdydz$ , la fonction  $\rho(x, y, z)$  représentant la densité volumique de masse, et  $dxdydz$  l'élément de volume si bien que  $dm$  représente l'élément de masse au point  $(x, y, z)$ .

Les formules deviennent...

...pour un objet à trois dimensions :

$$x_G = \frac{\iiint_D x \cdot \rho(x, y, z).dxdydz}{\iiint_D \rho(x, y, z).dxdydz}; y_G = \frac{\iiint_D y \cdot \rho(x, y, z).dxdydz}{\iiint_D \rho(x, y, z).dxdydz}; z_G = \frac{\iiint_D z \cdot \rho(x, y, z).dxdydz}{\iiint_D \rho(x, y, z).dxdydz}$$

...et pour un objet à deux dimensions :

$$x_G = \frac{\iint_D x \cdot \rho(x, y).dxdy}{\iint_D \rho(x, y).dxdy}; y_G = \frac{\iint_D y \cdot \rho(x, y).dxdy}{\iint_D \rho(x, y).dxdy}$$

Remarque : Quel que soit le nombre de dimensions, le dénominateur correspond toujours à la masse totale de l'objet. C'est la somme, dans l'objet, de tous les  $dm$ .

## F-II. Exercices

### a. Cas d'un cône

Le cône C est compris entre la surface d'équation  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$  et le plan  $z = 0$ .

- 1) Si la densité volumique de masse au point  $M(x;y;z)$  est égale à 1, quelles sont les coordonnées de son centre d'inertie ?
- 2) Si la densité volumique de masse au point  $M(x;y;z)$  est égale à  $z$  quelles sont les coordonnées de son centre d'inertie ?

### b. Cas d'une demi boule

La demi boule de centre  $O(0;0;0)$  et de rayon 1 située dans le demi espace  $z \leq 0$  a une densité uniforme. Quelles sont les coordonnées de son centre d'inertie ?

### c. Cas d'un « culbuto »

Un culbuto est constitué d'une demi sphère homogène (comme celle utilisée au B2) surmontée d'un cône homogène aussi (comme celui utilisé au B1). La sphère est dans une matière dont la densité volumique de masse est 3 et le cône dans une matière dont la densité volumique de masse est 1. Quelles sont les coordonnées du centre d'inertie du culbuto.

### d. Cas d'un disque évidé

On utilise un disque de centre  $O(0;0)$  et de rayon 2. Ce disque est homogène dans une matière dont la densité surfacique de masse est 1. On évidé ce disque en créant un trou de forme circulaire à l'emplacement du disque de centre  $I(1;0)$  et de rayon 1. Où est le centre d'inertie de ce disque évidé ?

## G. Notion de moment d'inertie

### G-I. Le cas physique : par rapport à un axe

On sait que faire tourner une masse  $m$  autour d'un axe est d'autant plus difficile (c'est à dire demande d'autant plus d'efforts) que  $m$  est grand et que la distance de cette masse à l'axe de rotation est grande.

En fait, si on note  $\Delta$  l'axe de rotation et  $r$  la distance du point  $M$  portant la masse  $m$ , l'effort pour faire tourner  $M$  autour de  $\Delta$  est  $mr^2$ .

Cet effort est nommé moment d'inertie du point  $M$  par rapport à l'axe  $\Delta$ .

On admet que si on veut faire tourner plusieurs points  $M_i$  (du même solide) pour  $i = 1..n$  autour du même axe  $\Delta$ , l'effort global à fournir est la somme des efforts à fournir pour faire tourner séparément chaque point :

$$\text{Moment} = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 .$$

Lorsqu'un solide S est continu, la masse est répartie dans l'ensemble de ce solide et, en notant  $\delta(x, y, z)$  la densité de masse en tout point  $M(x, y, z)$ , on obtient la formule de définition :

$$\text{Moment}_{(S,\Delta)} = \iiint_S \delta(x, y, z) \cdot dx dy dz \cdot (\text{dist}(M(x, y, z), \Delta))^2$$

formule qui s'écrit plus banalement :

$$\text{Moment}_{(S,\Delta)} = \iiint_S r^2 \cdot \delta(x, y, z) \cdot dx dy dz$$

où  $r^2$  est bien entendu le carré de la distance du point  $M(x, y, z)$  à l'axe  $\Delta$ . Par exemple, si l'axe  $\Delta$  est l'axe  $Oy$ , on a  $r^2 = x^2 + z^2$ .

Si le solide n'est qu'à deux dimensions (par exemple une plaque métallique « fine ») la masse n'est répartie qu'en deux dimensions et la densité de masse est une densité surfacique...

## G-II. Généralisations mathématiques : par rapport à un plan ou un point

La notion physique de rotation n'a de sens par rapport à un axe, mais les mathématiciens (qui ne sont pas des expérimentateurs) ont généralisé cette notion de moment en imaginant que les distances ne soient plus calculées par rapport à un axe mais plutôt par rapport à un plan ou par rapport à un point.

La formule de définition reste exactement la même :

Si  $P$  est un plan, le moment d'inertie du solide  $S$  par rapport à  $P$  est

$$\text{Moment}_{(S,P)} = \iiint_S r^2 \cdot \delta(x, y, z) \cdot dx dy dz$$

où  $r^2$  est le carré de la distance du point  $M(x, y, z)$  au plan  $P$ .

Si  $I$  est un point, le moment d'inertie du solide  $S$  par rapport à  $I$  est

$$\text{Moment}_{(S,I)} = \iiint_S r^2 \cdot \delta(x, y, z) \cdot dx dy dz$$

où  $r^2$  est le carré de la distance du point  $M(x, y, z)$  au point  $I$ .

## G-III. Moment d'inertie par rapport à un axe

- 1) Une tige matérielle homogène de longueur  $2l$  est placée perpendiculairement à l'axe de rotation nommé  $\Delta$ . Si  $\Delta$  passe par une extrémité de la tige, quelle est le moment d'inertie de cette tige ? Et si  $\Delta$  passe par le milieu de la tige... ?
- 2) Un disque matériel de rayon  $R$  tourne autour d'un axe  $\Delta$  passant par un point de la circonférence de ce disque. Si  $\Delta$  est dans le plan du disque, quel est le moment d'inertie du disque ? Et si  $\Delta$  est perpendiculaire au plan du disque ?

## G-IV. Moments d'inertie par rapport à un point

- 1) Une **sphère**  $\Sigma$  homogène a pour rayon 1. Quel est son moment d'inertie par rapport à son centre ?
- 2) Une **boule**  $B$  homogène a pour rayon 1. Quel est son moment d'inertie par rapport à son centre ?
- 3)  $P$  est une plaque homogène, carrée, de côté 1. Quel est son moment d'inertie par rapport à son centre ? Et par rapport à l'un de ses sommets ? Et par rapport à un de ses côtés ?

## G-V. Moments d'inertie par rapport à un plan

- 1) Une tige matérielle homogène a pour longueur  $2l$ . Elle est placée perpendiculairement à un plan  $P$ . Si  $P$  passe par une extrémité de la tige, quelle est le moment d'inertie de cette tige ? Et si  $P$  passe par le milieu de la tige... ? Et si  $P$  contient la tige ?
- 2) Une sphère  $\Sigma$  homogène a pour rayon 1. Quel est son moment d'inertie par rapport à un plan qui contient son centre ? Et par rapport à un plan tangent à la sphère ?
- 3) Une boule  $B$  homogène a pour rayon 1. Quel est son moment d'inertie par rapport à un plan qui contient son centre ? Et par rapport à un plan tangent à la boule

