

## Intégrales doubles

### Calcul d'aires et de volumes

## A. Notion d'intégrale double

### A-I. Domaine quarrable

On suppose que le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Soit  $D$  un domaine du plan contenu dans le rectangle  $[a, b] \times [c, d]$

On partage  $[a, b]$  à l'aide  $x_0, x_1, \dots, x_n$  tels que  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  et on partage de même  $[c, d]$  à l'aide  $y_0, y_1, \dots, y_p$  tels que  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_p = d$ .

On additionne les aires de tous les « sous-rectangles »  $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$  qui sont entièrement dans  $D$  : le résultat est inférieur à l'aire de  $D$  ... si  $D$  possède une aire. Appelons  $A_{n,p}^-$  ce résultat.

On additionne les aires de tous les « sous-rectangle »  $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$  qui ont au moins un point en commun avec  $D$  : le résultat est supérieur à l'aire de  $D$  ... si  $D$  possède une aire. Appelons  $A_{n,p}^+$  ce résultat.

On augmente le nombre de points des partages  $x_0, x_1, \dots, x_n$  et  $y_0, y_1, \dots, y_p$  de sorte que la diagonale des « sous-rectangles » tende vers 0 : les deux résultats  $A_{n,p}^-$  et  $A_{n,p}^+$  sont de plus en plus proches de l'aire de  $D$  ... si  $D$  possède une aire.

Définition :

On dit que  $D$  est quarrable si  $\lim_{diag \rightarrow 0} A_{n,p}^- = \lim_{diag \rightarrow 0} A_{n,p}^+$  et on dit alors que cette limite est l'aire de  $D$ .

A l'école primaire il y a longtemps, on construisait réellement des quadrillages de plus en plus fins pour deviner quelle était l'aire d'un disque... et on constatait que le quotient de l'aire obtenue en pratique par le carré du rayon était quasiment le même pour tous les élèves : à peine plus que 3.

### A-II. Notation intégrale, calcul de l'aire d'un domaine

Si  $D$  désigne un domaine quarrable, son aire est notée  $\iint_D dx.dy$  où  $dx.dy$  représente l'aire d'un élément de surface.

Pour calculer cette intégrale (qui est double), suivant la forme du domaine on utilise une méthode qui permet de la remplacer par deux intégrales simples successives...

#### 1<sup>er</sup> Cas

Supposons que, d'une part les points de  $D$  ont tous des abscisses entre  $a$  et  $b$ , d'autre part, pour toute valeur de  $x$  entre  $a$  et  $b$ , les points de  $D$  ont des ordonnées  $y$  qui vérifient  $g_1(x) < y < g_2(x)$  où  $g_1$  et  $g_2$  sont des fonctions continues. On peut alors écrire :

$$\iint_D dx.dy = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \right) dx$$

#### 2<sup>ème</sup> Cas

Supposons que, d'une part les points de  $D$  ont tous des ordonnées entre  $c$  et  $d$ , d'autre part, pour toute valeur de  $y$  entre  $c$  et  $d$ , les points de  $D$  ont des abscisses  $x$  qui vérifient  $g_1(y) < x < g_2(y)$  où  $g_1$  et  $g_2$  sont des fonctions continues. On peut alors écrire :

$$\iint_D dx.dy = \int_c^d \left( \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} dx \right) dy$$

Exemples :

- 1) Calculer l'aire du domaine  $D$  tel que 
$$\begin{cases} 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \sin(x) < y < x \end{cases} .$$
- 2) Calculer l'aire du domaine  $D$  tel que 
$$\begin{cases} 0 < y < 1 \\ 0 < x < e^y \end{cases} .$$
- 3) Calculer l'aire du domaine  $D$  tel que 
$$\begin{cases} 0 < y < 1 \\ 1 - \sqrt{y} < x < 1 + \sqrt{y} \end{cases} .$$

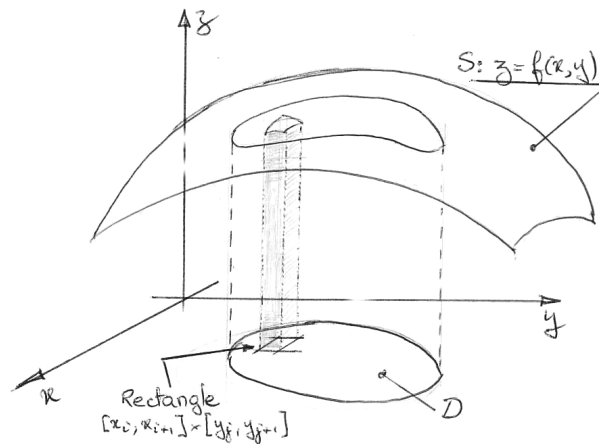
### A-III. L'intégrale double

Soit  $f(x, y)$  une fonction de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}$  à valeurs positives définie dans un domaine quarrable  $D$ .

La représentation de  $f$  est une surface  $S$  dans l'espace muni du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On partage  $D$  en sous-rectangles comme au paragraphe AI. Dans chaque sous-rectangle  $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ , on choisit un point  $M(x, y)$  et on calcule l'image de  $(x, y)$  pour la fonction  $f$ . La somme des volumes des colonnes dont la base est un des sous-rectangles et la hauteur  $f(x, y)$  est une approximation du volume compris entre le plan  $z = 0$  et la surface  $S$ , s'appuyant sur le contour de  $D$  : on reconnaît la méthode de Riemann.

Lorsque le quadrillage de  $D$  devient suffisamment « fin » pour que la diagonale de chaque sous-rectangle tende vers 0, si le domaine de l'espace compris entre le plan  $z = 0$  et la surface  $S$ , s'appuyant sur le contour de  $D$ , possède un volume celui ci est la limite des sommes de Riemann et on le note  $\iint_D f(x, y).dx.dy$ .



Remarques fondamentales :

- 1) A priori, **l'intégrale double est faite pour calculer un volume...** de même que l'intégrale simple était faite pour calculer une aire.
- 2) Si  $f(x, y)$  n'est pas à valeurs positives, l'intégrale ne s'interprète plus comme un volume mais la méthode de Riemann est la même.
- 3) Dans une intégrale double, les bornes en  $x$  et  $y$  doivent toujours être rangées en ordre croissant c'est à dire la plus petite « en bas » et la plus grande « en haut ».

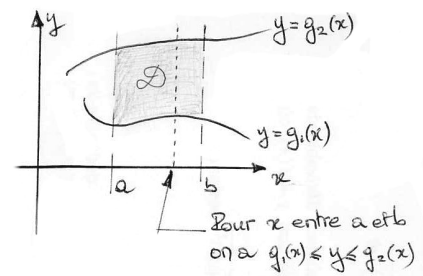
### A-IV. Propriétés de l'intégrale double

#### a. Intégrales successives (ou itérées)

##### 1<sup>er</sup> Cas

Si les points de  $D$  ont tous des abscisses entre  $a$  et  $b$ , et si pour toute valeur de  $x$  entre  $a$  et  $b$ , les points de  $D$  ont des ordonnées  $y$  qui vérifient  $g_1(x) < y < g_2(x)$  où  $g_1$  et  $g_2$  sont des fonctions continues. On peut alors écrire :

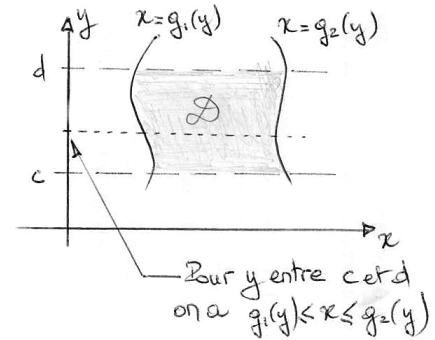
$$\iint_D f(x, y).dx.dy = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y).dy \right).dx$$



## 2<sup>ème</sup> Cas

Supposons que, d'une part les points de  $D$  ont tous des ordonnées entre  $c$  et  $d$ , d'autre part, pour toute valeur de  $y$  entre  $c$  et  $d$ , les points de  $D$  ont des abscisses  $x$  qui vérifient  $g_1(y) < x < g_2(y)$  où  $g_1$  et  $g_2$  sont des fonctions continues. On peut alors écrire :

$$\iint_D f(x, y).dx.dy = \int_c^d \left( \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y).dx \right).dy$$



### Cas particulier

Si  $D$  est le rectangle  $[a, b] \times [c, d]$  et si  $f(x, y)$  est un produit de deux fonctions intégrables l'une de  $x$  et l'autre de  $y$ , c'est à dire  $f(x, y) = f_1(x).f_2(y)$  alors on a :

$$\iint_D f(x, y).dx.dy = \int_a^b f_1(x).dx \int_c^d f_2(y).dy$$

Ce cas, bien que « très agréable » est, hélas, assez rare : en général une intégrale double n'est pas le produit de deux intégrales simples.

### Exercices :

- 1)  $D$  est tel que  $\begin{cases} 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 < y < x^2 \end{cases}$  et on donne  $f(x, y) = x.\cos(y)$ .

Calculer  $\iint_D f(x, y).dx.dy$

- 2)  $D$  est le triangle de sommets  $A(1;0), B(1;1), C(0;1)$ . Calculer  $\iint_D (x+y).dx.dy$

- 3)  $D$  est le rectangle de sommets  $O(0;0), A(1;0), B(1;1), C(0;1)$ . Calculer  $\iint_D xye^{x^2}.dx.dy$

### b. Linéarité

Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions intégrables dans  $D$ ,

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)).dx.dy = \alpha \iint_D f(x, y).dx.dy + \beta \iint_D g(x, y).dx.dy$$

### c. Additivité des domaines

Si  $f$  est une fonction intégrable dans  $D$ ,

et si de plus  $D = D_1 \cup D_2$  avec  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$  alors :

$$\iint_D f(x, y).dx.dy = \iint_{D_1} f(x, y).dx.dy + \iint_{D_2} f(x, y).dx.dy$$

### Exercices :

- 1) Calculer l'intégrale  $I = \int_0^1 \left( \int_{x^2}^1 (x+y).dy \right).dx$

- 2) On appelle  $D$  le domaine délimité par les quatre cercles de rayon 1 et de centres respectifs  $A(1;1), B(-1;1), C(-1;-1), D(1;-1)$ . Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \iint_D dx dy$	$I_2 = \iint_D x dx dy$
$I_3 = \iint_D xy dx dy$	$I_4 = \iint_D (x-y) dx dy$

- 3) On appelle  $D$  le domaine délimité par :  $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 < y < 0 \end{cases}$ . Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \iint_D dx dy$	$I_2 = \iint_D x dx dy$
$I_3 = \iint_D xy dx dy$	$I_4 = \iint_D (x - y) dx dy$

4) Echanger l'ordre d'intégration dans les intégrales suivantes (on ne demande évidemment pas de calculer l'intégrale puisque la fonction est inconnue !):

$I_1 = \int_0^a \left( \int_0^{\frac{b}{b+x}} f(x, y) dy \right) dx$ avec $a > 0$ et $b > 0$	$I_2 = \int_0^1 \left( \int_{x^2}^1 f(x, y) dy \right) dx$
$I_3 = \int_0^a \left( \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx \right) dy$	

## B. Changement de variables dans les intégrales doubles

### B-I. Déterminant Jacobien d'un changement de variables

Soit  $(u, v)$  un couple de variables calculées à partir de  $(x, y)$ , c'est à dire que  $u$  et  $v$  sont des fonctions de  $(x, y)$ . Pour qu'un tel changement de variable soit correct, il faut évidemment que  $u$  et  $v$  soient des fonctions à dérivées continues et que chaque couple de valeurs pour  $(x, y)$  corresponde à un couple unique de valeurs pour  $(u, v)$  et réciproquement c'est à dire que le changement de variable doit être bijectif.

On appelle déterminant Jacobien du changement de variables  $(x, y) \rightarrow (u, v)$  le déterminant, noté  $J(x, y)$ ,

$$\text{tel que : } J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Par exemple, si on a  $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$  alors on a  $J(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$

Autre exemple, si on a  $\begin{cases} x = r \cdot \cos(\theta) \\ y = r \cdot \sin(\theta) \end{cases}$  alors on a  $J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cdot \cos(\theta) \end{vmatrix} = r$

Propriété : Si dans un domaine le Jacobien d'un changement de variable ne s'annule jamais (sauf peut-être en des points isolés) alors ce changement de variable est bijectif.

Interprétation du Jacobien : L'élément de surface décrit par les variables  $(u, v)$  c'est à dire  $du \cdot dv$  n'a pas forcément la même « taille » que l'élément de surface décrit par les variables  $(x, y)$  c'est à dire  $dx \cdot dy$  ...

Lorsque le changement de variable est correct on a la relation  $du \cdot dv = |J(x, y)| \cdot dx \cdot dy$ .

Par exemple, si on a  $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$  alors on a  $J(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$  donc  $du \cdot dv = 2 \cdot dx \cdot dy$

Autre exemple, si on a  $\begin{cases} x = r \cdot \cos(\theta) \\ y = r \cdot \sin(\theta) \end{cases}$  alors on a  $J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cdot \cos(\theta) \end{vmatrix} = r$  donc  $dx \cdot dy = r \cdot dr \cdot d\theta$

**B-II. Exercices :**

1) Décrire les domaines suivants en coordonnées polaires :

$D_1 = \begin{cases} x^2 + y^2 < 1 \\ x + y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$	$D_2 = \begin{cases} (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 < \frac{a^2}{4} \\ y > 0 \text{ (avec } a > 0) \end{cases}$	$D_3 = \begin{cases} \text{Triangle de sommets} \\ O(0;0) \ A(-1;1) \ B(1;1) \end{cases}$
---	--	---

2) Calculer les intégrales suivantes où les domaines sont ceux de l'exercice précédent

$I_1 = \iint_{D_1} (x^2 + y^2).dxdy$	$I_2 = \iint_{D_1} x.dxdy$	$I_3 = \iint_{D_1} \frac{dxdy}{1 + x^2 + y^2}$
$I_4 = \iint_{D_2} y.dxdy$	$I_5 = \iint_{D_2} (x + y).dxdy$	$I_6 = \iint_{D_2} xy.dxdy$
$I_7 = \iint_{D_3} y.dxdy$	$I_8 = \iint_{D_3} (x - y).dxdy$	$I_9 = \iint_{D_3} xy.dxdy$

3) Calculer  $I = \iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^3}$  où  $D = \{x \geq 1; y \geq 1; x + y \leq 3\}$

4) Calculer  $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}.dxdy$  où  $D = \{x^2 + y^2 - 2y \geq 0; x^2 + y^2 - 1 \leq 0; x \geq 0; y \geq 0\}$

5) Calculer  $I = \iint_D (x^2 + y^2 + 1).dxdy$  où  $D = \{x^2 + y^2 - x \leq 0\}$

