

Déterminants

Initiation à la diagonalisation de matrice

A. Déterminant d'une matrice carrée

A-I. Définitions élémentaires

Si A est la matrice (a) on appelle déterminant de cette matrice le nombre a .

Si A est la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ on appelle déterminant de cette matrice et on note $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ le nombre $ad - bc$.

A-II. Déterminant et produit mixte

Dans tout ce paragraphe, les vecteurs sont les vecteurs de l'espace usuel.

a. Aire d'un parallélogramme et produit vectoriel

On se rappelle que le produit vectoriel de \vec{u} par \vec{v} est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et défini comme suit :

- 1) Si \vec{u} ou \vec{v} est nul alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur nul.
- 2) Sinon, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à la fois à \vec{u} et à \vec{v} , le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est direct,

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\vec{u}, \vec{v})|.$$

On se rappelle aussi que si A, B et C sont trois points et si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors $CH = AC \cdot \sin(\widehat{BAC})$ et que par conséquent, l'aire \mathcal{A} du parallélogramme $BACD$ est $BA \times CH$ c'est à dire $\mathcal{A} = BA \times AC \cdot \sin(\widehat{BAC}) = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$.

On se rappelle enfin que si l'espace est muni d'un repère orthonormé, et si on a $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors on a

$$\vec{u} \wedge \vec{u}' = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}.$$

b. Volume d'un pavé et produit mixte

Le volume d'un pavé s'obtient en multipliant son aire de base par sa hauteur... et si le pavé est oblique il faut se méfier du fait que la hauteur ne correspond pas à la longueur d'une arête : c'est la projection de cette longueur sur une droite perpendiculaire au plan de la base.

Cela revient donc à dire que le volume \mathcal{V} d'un pavé dont trois arêtes issues du même sommet sont AB, AC, AD est le produit $|(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD}|$.

Définition : Si \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont trois vecteurs de l'espace usuel, on appelle produit mixte de ces trois vecteurs le nombre $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ et on le note $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. On a par choix : $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = \text{Volume du pavé...}$

Propriétés :

- 1) Le produit mixte de trois vecteurs change de signe lorsqu'on échange deux vecteurs
- 2) Le produit mixte est inchangé si on effectue une permutation circulaire des trois vecteurs.
- 3) Il revient au même de dire :
 - le produit mixte de trois vecteurs est nul
 - l'un des trois vecteurs (au moins) est combinaison linéaire des deux autres
 - les trois vecteurs sont coplanaires

c. Déterminant d'ordre 3

En repère orthonormé, si on a $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors le produit mixte $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ a pour valeur

$a.(yz' - zy') + b.(zx' - xz') + c.(xy' - yx')$ ce qui fait penser au calcul de trois déterminants d'ordre 2.

En présentant le calcul sous la forme d'un tableau, on aurait :

$$\begin{vmatrix} x & x' & a \\ y & y' & b \\ z & z' & c \end{vmatrix} = a. \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} - b. \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} + c. \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

Comme on sait que le produit mixte est invariant par permutation circulaire, on pourrait aussi écrire :

$$\begin{vmatrix} a & x & x' \\ b & y & y' \\ c & z & z' \end{vmatrix} = a. \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} - b. \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} + c. \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

Définition : On appelle déterminant d'ordre 3 le « tableau » $\begin{vmatrix} a & x & x' \\ b & y & y' \\ c & z & z' \end{vmatrix}$ dont la valeur est

$$a. \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} - b. \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} + c. \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

Propriétés :

- 1) Un déterminant d'ordre 3 est invariant par permutation circulaire de ses colonnes (ou de ses lignes)
- 2) Un déterminant d'ordre 3 est nul dès qu'une des ses colonnes est combinaison linéaire des de ses autres colonnes (idem avec les lignes).
- 3) Un déterminant d'ordre 3 est invariant si on ajoute à une de ses colonnes une combinaison linéaire de ses autres colonnes (idem avec les lignes).

A-III. Applications

1) Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2) Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne $A(1;2;0)$, $B(0;-1;0)$ et $C(1;1;1)$.

Quelle est l'aire du parallélogramme ABCD ? Quel est le volume du pavé dont trois arêtes issues de O sont OA, OB et OC ? Quelle est la distance de O au plan de ABC ?

3) L'espace muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Est-il possible que le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit coplanaire avec les deux vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$?

Comment faut-il choisir x pour que le volume du pavé dont trois arêtes sont $\overline{OA} \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overline{OB} \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ 7 \end{pmatrix}$ et

$\overline{OC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ soit maximum ?

A-IV. Généralisation aux matrices « $n \times n$ » : déterminant d'ordre n

a. Définition

1) Signes symboliques.

On décide d'affecter à chaque terme de position (i, j) - numéro de ligne, numéro de colonne - le signe de $(-1)^{i+j}$. Ainsi, le terme situé « en haut à gauche » est toujours affecté du signe + et les signes des autres termes s'en déduisent de façon simple : à chaque déplacement (en ligne ou en colonne mais pas en diagonale) le signe change. Ces signes sont appelés signes symboliques, ils n'ont rien à voir avec la valeur réellement écrite en position (i, j) .

$$\begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix}$$

signes symboliques pour l'ordre 2

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

signes symboliques pour l'ordre 3

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}; \text{ etc...}$$

signes symboliques pour l'ordre 4

2) Calcul par récurrence.

Un déterminant d'ordre n s'obtient en calculant n déterminants d'ordre $n-1$ de la façon suivante : on choisit une colonne (ou une ligne) du déterminant d'ordre n , on multiplie chaque terme de cette colonne (ou ligne) par le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu en rayant la ligne et le colonne de ce terme et en faisant précéder chacun de ces produits par le signe symbolique du terme de départ, enfin on additionne tous les produits obtenus.

Exemple : Calcul de $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$... en utilisant systématiquement la première ligne :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = + (1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} - (2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + (3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} D &= + (1) \cdot (+ (3)(2) - (1)(1) + (2)(-5)) \\ &\quad - (2) \cdot (+ (2)(2) - (1)(3) + (2)(-5)) \\ &\quad + (3) \cdot (+ (2)(1) - (3)(3) + (2)(5)) \\ &\quad - (-1) \cdot (+ (2)(-5) - (3)(-5) + (1)(5)) \end{aligned}$$

$$D = -5 + 18 + 9 - 20 = 2$$

Remarque : Cette méthode est horriblement lourde et n'est à employer qu'après avoir utilisé les propriétés suivantes pour simplifier le calcul...

b. Propriétés

- 1) Un déterminant d'ordre n est transformé en son opposé lorsqu'on échange deux colonnes (idem pour les lignes).
- 2) Un déterminant d'ordre n est nul dès qu'une des ses colonnes est combinaison linéaire des de ses autres colonnes (idem avec les lignes).
- 3) Un déterminant d'ordre n est invariant si on ajoute à une de ses colonnes une combinaison linéaire de ses autres colonnes (idem avec les lignes).
- 4) Un déterminant d'ordre n est multiplié par k si on multiplie les termes d'une de ses colonnes par k (idem pour les lignes)
- 5) Un déterminant d'ordre n est multiplié par k^n si on multiplie tous ses termes par k .

B. Exercices

B-I. Calculer les déterminants

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}; D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

B-II. Résoudre les équations

$$(E1): \begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 2 \\ 1 & x & 0 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; (E2): \begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -x & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 & 1 \\ -1 & x & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & x \\ -1 & x & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

C. Lien entre matrices « carrées » et déterminants

Seules les matrices carrées sont liées simplement à la notion de déterminant. Dans le cas où une matrice est carrée, le déterminant associé à cette matrice est noté $\det(M)$.

Par exemple, si on a $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ alors $\det(M) = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 12$

Si la matrice carrée M représente l'application linéaire u , alors le déterminant associé à M est aussi noté $\det(u)$.

Nous admettrons les deux propriétés suivantes :

- 1) Il est équivalent de dire :
 - $\det(u)$ est non-nul
 - u est bijective
 - u possède une application réciproque
- 2) Si u^{-1} est la réciproque d'une application linéaire u , alors $\det(u^{-1}) \cdot \det(u) = 1$.

Remarque : Si on est sûr que u possède une application réciproque, la matrice de cette dernière peut s'obtenir de différentes façons, en particulier en résolvant un système d'équations linéaires... mais aussi par des procédés très différents et en particulier avec des programmes informatiques faits spécifiquement pour ce genre de tâche. Souvent les calculettes graphiques et/ou programmables contiennent un programme qui permet d'inverser une matrice c'est à dire de trouver la matrice de la réciproque.

D. Vecteurs propres et valeurs propres

D-I. Tout vient des homothéties

On appelle homothétie vectorielle de rapport k toute application linéaire h d'un espace vectoriel E dans lui-même telle que $h(V) = kV$ pour tout V de E .

En particulier, si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , alors $h(e_1) = ke_1, \dots, h(e_n) = ke_n$.

Dans ces conditions, si A désigne la matrice de h dans la base (e_1, \dots, e_n) on a :

en dimension 2 $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ ou en dimension 3 $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ et plus généralement, quelle que soit le

dimension, des k sur la diagonale de la matrice et des 0 ailleurs.

On peut remarquer que, si on change de base, la matrice de h sera toujours la même puisque, quels que soient les vecteurs de base, ils vérifieront toujours $h(V) = kV$.

On peut aussi remarquer que le déterminant associé à la matrice d'une homothétie est particulièrement simple : c'est k^d où k est le rapport d'homothétie et d la dimension de l'espace.

L'idée est alors de se demander si pour toute autre application linéaire f de E vers E il n'y aurait pas moyen de trouver une base avec laquelle la matrice de f dans cette base serait du type « diagonale » c'est à dire avec des 0 presque partout sauf sur la diagonale où la ligne n° contient le réel $a_i \dots$ ce n'est donc pas forcément le même réel sur toute la diagonale.

D-II. Définissons clairement ce qu'on cherche

Supposons que la matrice A d'une application linéaire f de E vers E soit diagonale dans une base (e_1, \dots, e_n) c'est à dire avec des 0 presque partout sauf sur la diagonale où la ligne n° contient le réel λ_i .

Cela signifie que $f(e_1) = \lambda_1.e_1, f(e_2) = \lambda_2.e_2, \dots, f(e_n) = \lambda_n.e_n \dots$ et que les vecteurs e_1, \dots, e_n ne sont pas nuls puisqu'ils forment un système libre.

Définition : On dit qu'un vecteur non-nul V est un vecteur propre pour f s'il existe un réel λ tel que $f(V) = \lambda.V$ on dit alors aussi que λ est une valeur propre pour f .

\Rightarrow Etant donnée une application linéaire f de E vers E on cherche à déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres pour cette application.

D-III. Une méthode de fou (c'est à dire très bête)

On choisit un réel λ au hasard et on essaye de trouver des vecteurs non-nul V tels que $f(V) = \lambda.V \dots$ évidemment en général « ça ne marche pas » et on risque de faire quelques milliers d'essais (ou bien plus) avant de trouver un vecteur propre.

Exemple : On donne la matrice de f : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Si on essaye de résoudre

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \end{pmatrix} \text{ c'est à dire}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 4x \\ x - y = 4y \end{cases} \dots \text{ la seule solution est } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \dots \text{ raté, ce n'est pas un vecteur non-nul !}$$

Autrement dit, on choisit $\lambda = 4$
et on cherche V tel que $f(v) = 4v$

Si on essaye de résoudre $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{13}}{2}x \\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}y \end{pmatrix}$ c'est à dire $\begin{cases} 2x+y = \frac{1+\sqrt{13}}{2}x \\ x-y = \frac{1+\sqrt{13}}{2}y \end{cases}$... on obtient

$$\begin{cases} x = y \cdot \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ y = x \cdot \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \text{ ce qui se réduit à } \begin{cases} x = y \cdot \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ y = y \cdot \frac{3+\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{-3+\sqrt{13}}{2} = y \text{ (toujours vrai)} \end{cases} \text{ et on en déduit un}$$

vecteur propre en choisissant la valeur de y ... par exemple, le vecteur de coordonnées $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ et 1 est un vecteur propre.

Il est évident qu'avant d'essayer le coefficient $\lambda = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ il risque de passer pas mal d'eau sous les ponts donc que la « méthode » est mauvaise : on ne cherche pas les vecteurs propres au hasard ! Il faut d'abord se demander quelles sont les valeurs propres, c'est à dire celles pour lesquelles l'équation $f(V) = \lambda.V$ d'inconnue V a de bonnes chances d'avoir des solutions.

D-IV. Où on retrouve les bijections...

L'équation $f(V) = \lambda.V$ peut s'écrire $f(V) - \lambda.V = 0$ et si on pose $g = f - \lambda.Id_E$ c'est à dire $g(V) = (f - \lambda.Id_E)(V) = f(V) - \lambda.V$ on voit que l'équation de départ peut en fait s'écrire $g(V) = 0$.

Cette équation a toujours au moins une solution, le vecteur nul, puisque pour toute application linéaire, l'image du vecteur nul est le vecteur nul. Le problème c'est que nous, on cherche une solution non-nulle... et qu'alors g ne peut pas être une bijection puisque 0 aura deux antécédents : 0 d'une part et « notre » solution d'autre part. Il ne reste plus qu'à se demander comment détecter les valeurs de λ pour lesquelles g n'est pas bijective... les solutions seront très probablement les valeurs propres, c'est à dire les valeurs de λ pour lesquelles cela vaudra le coup de tenter la résolution de $f(V) = \lambda.V$.

D-V. ...Et aussi les déterminants

Pour se fixer les idées, travaillons en dimension 2 avec une base (e_1, e_2) . La matrice de l'identité est

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et supposons que celle de f soit $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. La matrice de g telle que $g = f - \lambda.Id_E$ est alors

$\begin{pmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{pmatrix}$ et ce qui nous intéresse c'est que **g ne soit pas bijective... donc que son déterminant**

soit nul. Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation $\begin{vmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$ pour trouver les valeurs propres et

ensuite pour chacune de ces valeurs propres, chercher des vecteurs V tels que $f(V) = \lambda.V$... ce qui pose encore quelques problèmes lorsqu'on trouve une solution double ou triple... ou pire...

D-VI. Pour terminer

Si les vecteurs propres forment une base de l'espace vectoriel, alors dans cette base la matrice de f est une matrice diagonale... dont le déterminant est le produit des valeurs propres.

Pour les curieux, un site (créé par un enseignant) est remarquable et gratuit : <http://serge.mehl.free.fr> avec une page à votre niveau <http://serge.mehl.free.fr/dico/vp.html> (vp pour valeurs propres) et beaucoup d'autres absolument passionnantes... La salle « Chablis » est là pour ça, pas pour jouer en réseau !

D-VII. Exercice résumé

On donne la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ représentant une application linéaire f d'un espace vectoriel E dans lui-même muni de la base (u_1, u_2) .

- Déterminer une base (v_1, v_2) dans laquelle la matrice N de cette application linéaire soit diagonale. Quelle est cette matrice N ?
- Calculer les déterminants de M et de N .
- Calculer l'image de $3u_1 + u_2$ en l'exprimant dans la base (v_1, v_2) .

