Espaces vectoriels,
Applications linéaires et Matrices

A. Notion d'espace vectoriel

A-I. Définition

On dit qu'un ensemble E muni d'une addition interne ($E \times E \to E$) notée + et d'une multiplication externe ($\mathbb{R} \times E \to E$) notée « . » est un espace vectoriel lorsque :

1) Pour tous x, y et z dans E on a : $(x+y)+z = x+(y+z)$
2) Il existe dans E un élément noté 0 tel que, pour tout x dans E : $x+0 = 0+x = x$
3) Pour tout x dans E, il existe un élément noté $-x$ dans E tel que $x+(-x) = (-x)+x = 0$
4) Pour tous x et y dans E : $x+y = y+x$
5) Pour tout x dans E on a : $1.x = x$
6) Pour tout a dans $\mathbb{R}$, x et y dans E on a : $a.(x+y) = a.x+b.y$
7) Pour tous a et b dans $\mathbb{R}$ et x dans E, on a : $(a+b).x = a.x+b.x$
8) Pour tous a et b dans $\mathbb{R}$ et x dans E, on a $a.(b.x) = (ab).x$

Remarque : Les vecteurs usuels, ceux de la géométrie vus aux collège et au lycée sont (en France) notés avec une flèche en surlignement… Ce graphisme particulier ne sera pas utilisé pour les vecteurs plus généraux comme ceux que nous allons rencontrer dans ce cours.

A-II. Sous espace vectoriel

On dit qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous espace vectoriel de E si c'est une partie de E non-vide et stable par combinaisons linéaires, c'est à dire que si u et v sont dans F alors a*u+b*v doit aussi être dans F quels que soient les réels a et b.
Cette notion est copiée sur celle d'espèce animale… Un ensemble d'animaux est appelé « espèce » lorsqu'il est stable pour le mécanisme de procréation. Par exemple, les lions forment une espèce animale, les tigres en forment une autre, mais l'ensemble « lions et tigres » n'en forme pas une car même si un papa tigre et une maman lion peuvent procréer, leur enfant est toujours stérile.
Pour les vecteurs, la notion de procréation est représentée par les combinaisons linéaires ! Quel érotisme…

A-III. Exemples

1) Les vecteurs du plan définis en seconde forment un espace vectoriel noté $\mathcal{V}_2$
2) Les vecteurs de l'espace définis en première forment un espace vectoriel noté $\mathcal{V}_3$
3) Les fonctions linéaires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies en 4ème forment un espace vectoriel noté $\mathcal{L}(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$… mais on ne le dit pas aux élèves de 4ème, évidemment !
4) Les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ forment un espace vectoriel noté $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
5) Les fonctions intégrables dans [a ; b] forment un espace vectoriel qui est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
6) Les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 3 forment un espace vectoriel noté $\mathcal{P}_3$ qui est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

B. Systèmes libres, systèmes générateurs : bases

B-I. Définitions

Un système de vecteurs dans un espace vectoriel est dit libre si aucun d'eux ne peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des autres… c'est à dire :

$$[a_1.u_1 + \ldots + a_n.u_n = 0] \Rightarrow [a_1 = \ldots = a_n = 0]$$

En effet, si l'un des coefficients n'était pas nul, cela permettrait d'exprimer le vecteur affecté de ce coefficient comme une combinaison linéaire des autres…
Un système de vecteurs dans un espace vectoriel est dit générateur si tout autre vecteur de l'espace peut s'écrire comme une combinaison linéaire de ceux du système.

Un système de vecteurs est appelé base s'il est à la fois libre et générateur.

Propriété : Si un système de n vecteurs de E est une base de E, alors toute autre base de E contient n vecteurs.
Définition : Le nombre de vecteurs contenus dans une base de E est appelé dimension de E
Propriétés :

- Dans un espace vectoriel de dimension n, tout système libre contient au maximum n vecteurs… ce qui revient à dire que tout système de plus de n vecteurs n'est pas libre.
- Dans un espace vectoriel de dimension n, tout système générateur contient au moins n vecteurs… ce qui revient à dire que tout système de moins de n vecteurs n'est jamais générateur.

Conséquence   Si on sait qu'un espace vectoriel est de dimension n, tout système libre de n vecteurs est aussi un système générateur (donc c'est une base) et tout système générateur de n vecteurs est aussi un système libre (donc c'est une base).

B-II. Exercices : systèmes libres, systèmes générateurs

On appelle E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base « canonique » : $B=\left((1;0;0);(0;1;0);(0;0;1)\right)$

a) Les parties suivantes de E sont elles libres ?

▪ $\begin{cases} u_1=(3;1;5) \\ u_2=(1;-2;1) \\ u_3=(5;4;9) \end{cases}$	▪ $\begin{cases} u_1=(3;1;5) \\ u_2=(-7;0;-11) \\ u_3=(5;4;9) \end{cases}$	▪ $\begin{cases} u_1=(3;1;5) \\ u_2=(1;1;1) \\ u_3=(5;4;0) \end{cases}$

b) Les parties suivantes de E sont-elles génératrices ?

▪ $\begin{cases} u_1=(3;1;5) \\ u_2=(1;-2;1) \end{cases}$	▪ $\begin{cases} u_1=(3;1;5) \\ u_2=(-7;0;-11) \\ u_3=(5;4;9) \end{cases}$	▪ $\begin{cases} u_1=(3;1;5) \\ u_2=(1;1;1) \\ u_3=(5;4;0) \\ u_4=(2;1;0) \end{cases}$
▪ $\begin{cases} u_1=(3;-1;5) \\ u_2=(0;0;-1) \\ u_3=(1;0;1) \end{cases}$	▪ $\begin{cases} u_1=(1;1;2) \\ u_2=(1;2;1) \\ u_3=(2;1;1) \end{cases}$	▪ $\begin{cases} u_1=(-1;1;1) \\ u_2=(1;2;1) \\ u_3=(2;1;0) \end{cases}$

c) Peut-on trouver un triplet qui, en complétant le système donné, forme une base de E. Si oui, donner une solution.

▪ $\begin{cases} u_1=(3;1;5) \\ u_2=(1;-2;1) \end{cases}$	▪ $\begin{cases} u_1=(3;1;5) \\ u_2=(-7;0;-11) \\ u_3=(5;4;9) \end{cases}$	▪ $\begin{cases} u_1=(3;1;5) \\ u_2=(1;1;1) \\ u_3=(5;4;0) \\ u_4=(2;1;0) \end{cases}$
▪ $\begin{cases} u_1=(0;1;5) \\ u_2=(1;-2;1) \end{cases}$	▪ $\begin{cases} u_1=(3;1;5) \\ u_2=(0;0;0) \end{cases}$	▪ $\begin{cases} u_1=(-3;6;-3) \\ u_2=(1;-2;1) \end{cases}$

B-III. Exercices : espace vectoriel de fonctions

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues dans $\mathbb{R}$

a) Les fonctions suivantes, qui sont dans E, sont-elles indépendantes ?

▪ $f_1(x)=\sin(x)$ $f_2(x)=\cos(x)$	▪ $f_1(x)=e^x$ $f_2(x)=e^{-x}$	▪ $f_1(x)=x^2$ $f_2(x)=x^3$ $f_3(x)=1$
▪ $f_1(x)=\sin(x)$ $f_2(x)=\sin(2x)$	▪ $f_1(x)=\sin(x)$ $f_2(x)=\sin(2x)$ $f_3(x)=\cos(x)$	▪ $f_1(x)=\begin{cases}\ln(x) \text{ si } x>1\\ 0 \text{ sinon } (\text{x} \le 1)\end{cases}$ $f_2(x)=\begin{cases}\ln(x^2) \text{ si } x>1\\ 0 \text{ sinon } (x \le 1)\end{cases}$

b) Les fonctions suivantes, qui sont dans E, engendrent-elles le sous espace vectoriel $\mathcal{P}_2$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 ?

▪ $f_1(x)=x$ $f_2(x)=1-x^2$ $f_3(x)=1+x+x^2$	▪ $f_1(x)=1+2x$ $f_2(x)=-1+x+x^2$	▪ $f_1(x)=1+2x+3x^2$ $f_2(x)=2+3x+4x^2$ $f_3(x)=3+4x+5x^2$

c) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$?

C. Notion d'application linéaire

C-I. Définition

Si E et F sont des espaces vectoriels, on dit que f est une application linéaire de E dans F lorsqu'elle vérifie les deux propriétés :

$$\begin{cases} f(x+y)=f(x)+f(y) \\ f(k.x)=k.f(x)\end{cases} \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des vecteurs de E, et } k \text{ un réel.}$$

C-II. Application

On note E l'espace vectoriel des fonctions dérivables dans $\mathbb{R}$ et on appelle δ l'application qui à toute fonction f de E associe $2f-f'$ c'est à dire telle que : $\delta(f)=2f-f'$

a) Quelle est l'image de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x)=\sin(x)$	$f_2(x)=a.\sin(x)+b\cos(x)$	$f_3(x)=a.\sin(x^2)+b$
$f_4(x)=\text{Arcsin}(\frac{1}{1+x^2})$	$f_5(x)=\ln(1+x^2)$	$f_6(x)=e^{\sin(x)}$

b) Quelles sont les fonctions f telles que $\delta(f)=0$?

c) Montrer que δ est une application linéaire de E dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

D. Notion de matrice d'une application linéaire

D-I. Définition

On appelle matrice d'une application linéaire u de E dans F munis respectivement des bases $B_E = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $B_F = (f_1, f_2, ..., f_p)$ le tableau rectangulaire comportant n colonnes et p lignes où la colonne n° k (k variant de 1 à n) contient les coordonnées de l'image pour u de e_k exprimée dans la base B_F.

Remarque : Si v est un vecteur de E, v s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la base B_E c'est à dire $v = a_1.e_1 + ... + a_n.e_n$ et comme u est une application linéaire on a alors $u(v) = a_1.u(e_1) + ... + a_n.u(e_n)$ ce qui montre qu'il suffit de connaître les images des vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$ pour pouvoir calculer l'image de v. Comme les images de $e_1, e_2, ..., e_n$ sont dans F, chacune d'elles s'exprime comme une combinaison linéaire des vecteurs de B_F, c'est à dire :

$$\begin{cases} u(e_1) = a_{1,1}.f_1 + a_{2,1}.f_2 + ... + a_{p,1}.f_p \\ u(e_2) = a_{1,2}.f_1 + a_{2,2}.f_2 + ... + a_{p,2}.f_p \\ ... \\ u(e_n) = a_{1,n}.f_1 + a_{2,n}.f_2 + ... + a_{p,n}.f_p \end{cases}$$

La matrice de u est alors par définition le tableau de nombres : $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & ... & a_{3,n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{p,1} & a_{p,2} & ... & a_{p,n} \end{pmatrix}$ et si on note $a_{i,j}$ le terme général de cette matrice, alors $\begin{cases} i \text{ (le premier indice) est l'indice de ligne} \\ j \text{ (le deuxième indice) est l'indice de colonne} \end{cases}$

Vocabulaire : Une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes est appelée matrice « carrée »

D-II. Applications:

1) Soit l'application linéaire u de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ munis respectivement des bases $B_2 = \big((1;0);(0;1)\big)$ et $B_3 = \big((1;0;0);(0;1;0);(0;0;1)\big)$, vérifiant : $\begin{cases} u(1;0) = (1;2;3) \\ u(0;1) = (-1;0;1) \end{cases}$.

Calculer les images pour u de $(2;-1)$, de $(-1;5)$, de $(a;a)$, de $(a+b;a-b)$, de $(x;y)$ en utilisant le fait que u est linéaire.
Quelle est la matrice de u ?

2) Soit l'application linéaire u de $\mathcal{P}_2$ dans $\mathcal{P}_3$, espaces vectoriels de polynômes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de degrés respectivement inférieurs ou égaux à 2 et à 3 et munis respectivement des bases $B_2 = \left(1, x, x^2\right)$ et $B_3 = \left(1, x, x^2, x^3\right)$, vérifiant : $\begin{cases} u(1) = x + 2 \\ u(x) = x^3 - 5x \\ u(x^2) = 2x^3 + x^2 - 1 \end{cases}$.

Calculer les images pour u de $1 + x + x^2$ puis de $ax^2 + bx + c$ en utilisant le fait que u est linéaire.
Quelle est la matrice de u ?

3) On note $\mathcal{P}_3$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à 3 et on appelle δ l'application linéaire de $\mathcal{P}_3$ dans $\mathcal{P}_3$ telle que : $\delta(f) = f + 2f' + f''$

Quelle est la matrice de l'application δ si $\mathcal{P}_3$ est muni de sa base canonique (c'est à dire 1, x, x^2, x^3)

Quelle est la matrice de l'application δ si $\mathcal{P}_3$ est muni de la base (1, 1+x, $1+x+x^2$, $1+x+x^2+x^3$)

D-III. Calcul d'image et matrice

Si l'application linéaire u est représentée par la matrice M formée des termes $a_{i,j}$ (i étant le numéro de ligne et j celui de colonne) alors l'image de v dont les coordonnées sont $v_1, v_2, ..., v_n$ est le vecteur dont la coordonnée n° k (k variant de 1 à p) est $\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}.v_i$.

Exemple :

Soit l'application linéaire u de E dans F munis des bases B_E et B_F dont la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On sait d'après la forme de la matrice que E est de dimension 2 car la matrice contient deux colonnes et que F est de dimension 3 car la matrice contient 3 lignes.

Quelles sont les images des vecteurs de E dont les coordonnées dans B_E sont : $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Réponses :

Image de $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

Image de $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$

Image de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Image de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

D-IV. Applications

1) On note $\mathcal{V}_P$ le plan vectoriel usuel muni de la base $(\vec{i};\vec{j})$ et s désigne la symétrie vectorielle suivant la droite dirigée par $\overrightarrow{u_1} = \vec{i} + 3\vec{j}$ et par rapport à la droite dirigée par $\overrightarrow{u_2} = -\vec{i} + \vec{j}$.

Déterminer la matrice A de s dans la base $(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2})$ puis celle, B, de s dans la base $(\vec{i};\vec{j})$

Laquelle de ces deux matrices est la plus commode pour calculer l'image de $\overrightarrow{v_1} = 5\vec{i} + 6\vec{j}$?

Ecrire $\overrightarrow{v_1} = 5\vec{i} + 6\vec{j}$ comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ recalculer l'image de $\overrightarrow{v_1} = 5\vec{i} + 6\vec{j}$

2) On note $\mathcal{V}_P$ le plan vectoriel usuel muni de la base $(\vec{i};\vec{j})$ et s désigne l'application linéaire de $\mathcal{V}_P$ dans $\mathcal{V}_P$ qui, à tout vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, associe le vecteur $\overrightarrow{v'}\begin{pmatrix} x+y \\ x-2y \end{pmatrix}$.

Déterminer l'ensemble I des vecteurs $\vec{u}$ tels que $s(\vec{u}) = \vec{u}$.

Existe-t-il des vecteurs tels que $s(\vec{u}) = 3\vec{u}$?

Montrer qu'il existe deux réels λ tels que l'équation $s(\overrightarrow{u}) = \lambda\vec{u}$ possède des solutions autres que $\vec{0}$. Pour chacune de ces valeurs λ_1 et λ_2, trouver des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$, tels que $s(\overrightarrow{u_1}) = \lambda_1\overrightarrow{u_1}$ et $s(\overrightarrow{u_2}) = \lambda_2\overrightarrow{u_2}$
Quelle est la matrice A de s dans la base $(\vec{i};\vec{j})$ et celle B de s dans la base $(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2})$.

3) Soit l'application linéaire u de E dans F munis des bases B_E et B_F dont la matrice est $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Quelle est la dimension de l'espace de départ et quelle est celle de l'espace d'arrivée ?

Quelles sont les images des vecteurs de E dont les coordonnées dans B_E sont : $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

4) Soit l'application linéaire u de E dans F munis des bases B_E et B_F dont la matrice est $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Quelle est la dimension de l'espace de départ et quelle est celle de l'espace d'arrivée ?

Quelles sont les images des vecteurs de E dont les coordonnées dans B_E sont : $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

5) On note $\mathcal{V}_P$ le plan vectoriel usuel muni de la base orthonormée $(\vec{i};\vec{j})$ et r_α désigne la rotation vectorielle d'angle α. On admet que c'est une application linéaire de $\mathcal{V}_P$ dans $\mathcal{V}_P$.

Quelle est l'image de chacun des vecteurs de base ? Quelle est la matrice de r_α ? Quelle est l'image de $2\vec{i} + 3\vec{j}$?

6) On note $\mathcal{P}_3$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à 3 muni de sa base canonique (c'est à dire 1, x, x^2, x^3) et u l'application linéaire qui à chaque polynôme $p(x)$ de $\mathcal{P}_3$ associe sa primitive qui est nulle en 0. par exemple, l'image de $3 + x^2$ est $3x + \dfrac{x^3}{3}$.

Décrire l'espace d'arrivée de u. Préciser les dimensions des espaces de départ et d'arrivée. Préciser la matrice de u. A l'aide cette matrice, calculer une primitive de $16x^3 - 3x^2 + 4x + 5$.

E. Composition d'applications linéaires…

E-I. Problème de « compatibilité »

Si u est une application de E vers F et v une application de F vers G on peut composer les applications dans le sens « u d'abord, v après » c'est à dire qu'on peut calculer $v \circ u(x)$ lorsque x est dans E… car alors $u(x)$ est dans F et v peut « repartir » de $u(x)$ pour « fabriquer » $v(u(x))$ c'est à dire $v \circ u(x)$.
Si u et v sont des applications linéaires, cela impose que l'espace d'arrivée de u soit le même que celui de départ de v… et en particulier si u et v sont représentées par des matrices, cela signifie que le nombre de lignes de la matrice qui représente u (c'est la dimension de l'espace d'arrivée de u) soit le même que le nombre de colonnes de la matrice qui représente v (c'est la dimension de l'espace de départ de v).

E-II. Exemple :

On utilise $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ munis des bases respectives $\begin{cases} ((1;0;0);(0;1;0);(0;0;1)) \\ ((1;0);(0;1)) \\ (1) \end{cases}$.

On définit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par leurs matrices respectives :

$$M_u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } M_v = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est l'image du vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour la composée $v \circ u$?

On calcule successivement l'image du vecteur pour u puis v en utilisant les matrices :

$$M_u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-z \\ -x+2z \end{pmatrix}$$

puis $M_v M_u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2y-z \\ -x+2z \end{pmatrix} = 3.(x+2y-z)+2.(-x+2z) = x+6y+z$.

En fait le résultat aurait pu être obtenu directement à partir de la matrice unique $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ puisque $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x+6y+z \ldots$

La question est de savoir comment cette matrice unique pourrait être obtenue à partir de $M_u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $M_v = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$?

On observe que si on écrit $M_v M_u = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, en effectuant les produits « ligne de M_v par colonnes de M_u » on obtient successivement les résultats 1, 6 et 1.

F. … et Produit de matrices

F-I. Définition

Si A est une matrice à m lignes et n colonnes de terme général $a_{i,j}$ et si B est une matrice à n lignes et p colonnes de terme général $b_{i,j}$, alors $A.B$ est la matrice à m lignes et p colonnes dont le terme général $p_{i,j}$ est $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.b_{k,j}$.

Remarques :

1) Si A représente l'application linéaire u et si B représente l'application linéaire v alors le produit $A.B$ représente l'application linéaire $u \circ v$.
2) On dit que deux matrices carrées sont inverses l'une de l'autre lorsque leur produit est une matrice ne comportant que des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs. On admet que si une matrice A possède une matrice inverse celle-ci est unique et les deux matrices représentent des applications réciproques l'une de l'autre.

F-II. Applications

TD

1) Calculer si c'est possible les produits de matrices suivants :

$$P_1=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&1&1\end{pmatrix};\ P_2=\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix};\ P_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$P_4=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\0&1\end{pmatrix};\ P_5=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\0&1\end{pmatrix};\ P_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$P_7=\begin{pmatrix}1&3&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\0&1\end{pmatrix};\ P_8=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\0&1\end{pmatrix};\ P_9=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

2) On utilise le plan vectoriel $\mathcal{V}_P$. Montrer en utilisant un produit de matrices que la composée de deux rotations d'angles respectifs α et β est la rotation d'angle $\alpha+\beta$.
3) On appelle homothétie vectorielle de rapport k l'application h_k qui à tout vecteur u associe le vecteur $k.u$. Si on utilise le plan vectoriel $\mathcal{V}_P$ quelle est la matrice de h_k ? Et si on utilise les vecteurs de l'espace usuel ? Est-ce que ces réponses dépendent des bases utilisées ?
4) On utilise le plan vectoriel $\mathcal{V}_P$. On appelle similitude vectorielle plane d'angle α et de rapport k, la composée de la rotation d'angle α et de l'homothétie de rapport k. Quelle est la matrice d'une similitude ? Ce résultat dépend-il de l'ordre dans lequel on compose l'homothétie et la rotation ?
5) On utilise le plan vectoriel $\mathcal{V}_P$ muni de la base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$ et l'application linéaire S a pour matrice $\begin{pmatrix}-2&1\\1&3\end{pmatrix}$.
   - Déterminer l'ensemble des vecteurs qui ont pour image $\vec{0}$.
   - Peut-on trouver un vecteur dont l'image soit son propre opposé ?
   - Peut-on trouver un vecteur dont l'image soit le double de lui-même ?
   - Peut-on trouver un vecteur dont l'image est colinéaire à lui même ?
6) En résolvant un système d'équations, déterminer la matrice inverse de $\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ puis de $\begin{pmatrix}-1&3\\2&1\end{pmatrix}$.

G. Présentation du problème d'un changement de base : matrices de passage.

Un espace vectoriel E est muni de deux bases B et B' telles que $\begin{cases}B=(e_1,e_2,...,e_n)\\B'=(e_1',e_2',...,e_n')\end{cases}$.

Une application linéaire f de E dans E, est représentée par une matrice M lorsque les vecteurs sont exprimés dans la base B et, hélas, on s'aperçoit que les vecteurs de E qu'on souhaite traiter avec cette matrice sont exprimés dans la base B'.

Il y a alors deux attitudes possibles :

- soit on modifie la matrice M qui représente f lorsqu'on utilise la base B, de sorte qu'on obtienne une nouvelle matrice M' qui elle soit adaptée aux vecteurs exprimés dans B',
- soit on ré-exprime les vecteurs que l'on souhaite traiter de sorte qu'ils soient exprimés dans la base B et que, ainsi, on puisse se servir de la matrice M puis, on ré-exprime les résultats dans la base B' pour donner une réponse cohérente avec la question.

G-I. *Un cas simple pour tester si on a bien compris le problème*

Dans $\mathbb{R}^2$, on utilise les deux bases $\begin{cases} B = \left(e_1 = (1;0), e_2 = (0;1)\right) \\ B' = \left(e_1^{'} = (1;2), e_2^{'} = (-1;1)\right) \end{cases}$.

L'application linéaire f, en utilisant B, a pour matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

On souhaite calculer l'image de $v = 3e_1^{'} + 7e_2^{'}$.

1) Exprimer v à l'aide de e_1 et e_2, calculer l'image de v en utilisant M, ré-exprimer le résultat à l'aide de $e_1^{'}$ et $e_2^{'}$.
2) Calculer pour f, les images de $e_1^{'}$ et $e_2^{'}$.
3) Déduire de 2) la matrice M' de f lorsqu'on utilise la base B'. Calculer l'image de v à l'aide de M' et comparer le résultat avec celui obtenu au 1).

G-II. *La notion de matrice de passage*

On peut représenter le problème par un schéma :

V base B'	→	T1 : Passage de la base B' à la base B	→	matrice M (base B)	→	T2 : Passage de la base B à la base B'	→	image de V base B'

On comprend alors que les deux transformations T1 et T2 sont représentables par des matrices, et que le produit des trois matrices T1, M et T2 permet d'obtenir la matrice M'.

1) Dans quel ordre faut-il effectuer le produit ?

   Autrement dit, a-t-on M' = T1 . M . T2 ou M' = T2 . M . T1 ?
2) Dans le cas simple précédent, T1 est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ quelles relations doivent vérifier a, b, c et d ? Quelle est la première colonne de T1 ? et la deuxième ?…
3) Dans le cas général, comment peut-on décrire les colonnes de T1 ?
4) Si on calcule les produits T1 . T2 et T2 . T1, quels résultats s'attend-on à obtenir ? Que peut-on en déduire quant au lien entre T1 et T2 ?
5) En reprenant les données du cas simple, calculer T1 et T2.

G-III. *Application à un cas de dimension 3*

Dans P_2 (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2), f est l'application linéaire telle que :

$$\begin{cases} f(2+x) = 1-x \\ f(1+x^2) = x^2 \\ f(x-x^2) = x \end{cases}$$

1) Vérifier que $(2+x, 1+x^2, x-x^2)$ est bien une base de P_2.
2) Exprimer 1 puis x et enfin x^2 en combinaisons linéaires de $2+x, x^2$ et $x-x^2$.
3) Préciser la matrice de passage P, de la base $(1, x, x^2)$ à la base $(2+x, 1+x^2, x-x^2)$ et son inverse P^{-1} de la base $(2+x, 1+x^2, x-x^2)$ à la base $(1, x, x^2)$.
4) Quelle est la matrice M_1 de f dans la base $(1, x, x^2)$? Calculer l'image de $1+x+x^2$ en utilisant M_1.
5) Quelle est la matrice M_2 de f dans la base $(2+x, 1+x^2, x-x^2)$? Calculer l'image de $1+x+x^2$ en utilisant M_2.
6) Contrôler la cohérence des résultats de 4) et 5).

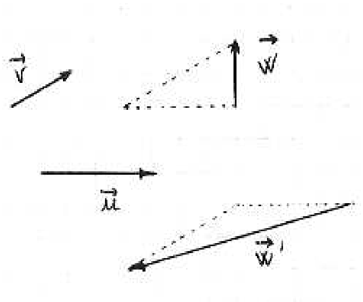
H. Les symétries vectorielles dans V_P (ensemble des vecteurs du plan)

H-I. Ce que c'est…

Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base de V_P. On appelle symétrie par rapport à $\vec{i}$ et suivant la direction de $\vec{j}$ l'application linéaire $s_{\vec{i},\vec{j}}$ telle que $\begin{cases} s_{\vec{i},\vec{j}}(\vec{i}) = \vec{i} \\ s_{\vec{i},\vec{j}}(\vec{j}) = -\vec{j} \end{cases}$. Dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ la matrice de $s_{\vec{i},\vec{j}}$ est très simple, c'est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

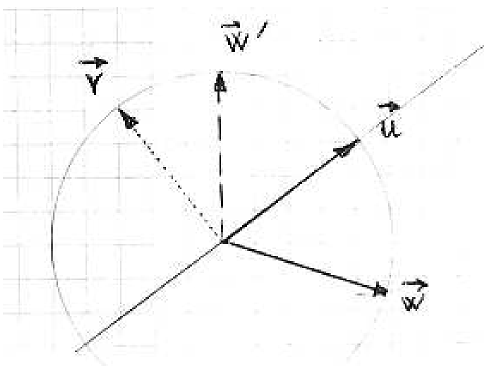
Plus généralement, on appelle symétrie par rapport à $\vec{u}$ et suivant la direction de $\vec{v}$ l'application linéaire $s_{\vec{u},\vec{v}}$ telle que $\begin{cases} s_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{u} \\ s_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{v}) = -\vec{v} \end{cases}$.

Si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont quelconques, la symétrie obtenue est « déformante »… autrement dit ce n'est pas une isométrie, elle ne conserve pas les normes des vecteurs donc elle ne conserve pas les angles géométriques. C'est la cas du dessin ci-contre :



$$s_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{w}) = \vec{w}'$$
$$\vec{w} = -1\vec{u} + 2\vec{v}$$
$$\vec{w}' = -1\vec{u} - 2\vec{v}$$

Si par contre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même norme et orthogonaux, alors la symétrie est une isométrie c'est à dire qu'elle conserve les normes des vecteurs donc elle conserve les angles géométriques. C'est le cas du dessin suivant :



$$s_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{w}) = \vec{w}'$$
$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$
$$\vec{w}' = a\vec{u} - b\vec{v}$$

H-II. Bien choisir la base

Dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ la matrice de s, symétrie par rapport à $\vec{u}$ et suivant la direction de $\vec{v}$, peut ne pas être très simple…

Supposons par exemple que $\begin{cases} \vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} \\ \vec{v} = \vec{i} - \vec{j} \end{cases}$, pour déterminer la matrice de s dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ on doit déterminer l'image de $\vec{i}$ et celle de $\vec{j}$… or on ne sait bien utiliser que les images de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: on va donc exprimer $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Il ne s'agit que d'une résolution de système… et on obtient $\begin{cases} \vec{i} = \dfrac{1}{3}\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \\ \vec{j} = \dfrac{1}{3}\left(\vec{u} - 2\vec{v}\right) \end{cases}$.

Il ne suffit pas d'y croire : il faut faire les calculs pour être sûr d'avoir compris…

On en déduit $s(\vec{i}) = s(\frac{1}{3}(\vec{u}+\vec{v})) = \frac{1}{3}(s(\vec{u})+s(\vec{v})) = \frac{1}{3}(\vec{u}-\vec{v}) = \frac{1}{3}(2\vec{i}+\vec{j}-\vec{i}+\vec{j}) = \frac{1}{3}\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}$ et de même $s(\vec{j}) = s(\frac{1}{3}(\vec{u}-2\vec{v})) = \frac{1}{3}(s(\vec{u})-2s(\vec{v})) = \frac{1}{3}(\vec{u}+2\vec{v}) = \frac{1}{3}(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{i}-2\vec{j}) = \frac{4}{3}\vec{i}-\frac{1}{3}\vec{j}$ et la matrice de s dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ est donc $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$ ce qui fait qu'on ne reconnaît plus du tout l'idée de symétrie ! En fait il est infiniment préférable pour représenter une symétrie par une matrice d'utiliser une base correspondant à cette symétrie : s'il s'agit de la symétrie par rapport à $\vec{u}$ et suivant la direction de $\vec{v}$, il semble plus logique d'utiliser la base $(\vec{u},\vec{v})$ plutôt que la base $(\vec{i},\vec{j})$ qui n'a rien à voir avec la symétrie envisagée.

H-III. Pourquoi ne peut-on pas toujours utiliser la « bonne » base ?

Si on utilise dans le même problème (pas au sens étroitement scolaire mais au sens d'une situation réelle à traiter) deux symétries qui n'ont pas les mêmes éléments de référence, on ne pourra pas trouver une base qui convienne aux deux… et fatalement au moins l'une des deux symétries devra se plier aux éléments de référence de l'autre.

Par exemple, on donne $(\vec{i},\vec{j})$ une base de V_P et deux symétries, s_1 symétrie par rapport à $\vec{i}+\vec{j}$ suivant la direction de $\vec{i}-\vec{j}$ et s_2 symétrie par rapport à $2\vec{i}+\vec{j}$ suivant la direction de $\vec{i}+2\vec{j}$.

Choisir une base et définir la composée $s_1 \circ s_2$ par sa matrice dans cette base.

On pose $B_1 \begin{cases} \overrightarrow{u_1} = \vec{i}+\vec{j} \\ \overrightarrow{v_1} = \vec{i}-\vec{j} \end{cases}$ et $B_2 \begin{cases} \overrightarrow{u_2} = 2\vec{i}+\vec{j} \\ \overrightarrow{v_2} = \vec{i}+2\vec{j} \end{cases}$ … B_1 et B_2 sont des bases… dans B_1, la matrice de s_1 est $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et dans B_2 celle de s_2 est $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

L'ennui c'est qu'***on ne peut pas les multiplier*** parce qu'elles ne sont pas définies dans la même base : soit il faut exprimer la matrice de s_1 dans B_2 soit il faut exprimer la matrice de s_2 dans B_1… soit encore exprimer les deux matrices, de B_1 et B_2 dans une base commune comme par exemple la base $(\vec{i},\vec{j})$… d'où l'intérêt de savoir « changer de base » c'est à dire utiliser les « matrices de passage » P et P^{-1} ou Q et Q^{-1}.

Ici, P matrice de passage de la base B_1 à la base $(\vec{i},\vec{j})$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sa réciproque P^{-1} est $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et de même, Q matrice de passage de la base B_2 à la base $(\vec{i},\vec{j})$ est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sa réciproque Q^{-1} est $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ on peut écrire que $s_1 \circ s_2$ a pour matrice : $\underbrace{P^{-1}.M_1.P}_{s_1 \text{ en base } (\vec{i},\vec{j})} . \underbrace{Q^{-1}.M_2.Q}_{s_2 \text{ en base } (\vec{i},\vec{j})} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$…

Ceux qui demandent des exercices supplémentaires peuvent toujours faire les calculs pour vérifier qu'ils arrivent au même résultat…

H-IV. Pour s’entraîner…

On donne $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base de V_P et deux symétries, s_1 symétrie par rapport à $\vec{i}-\vec{j}$ suivant la direction de $2\vec{i}-\vec{j}$ et s_2 symétrie par rapport à $\vec{i}+\vec{j}$ suivant la direction de $\vec{i}-\vec{j}$.

- ***Choisir une base et définir la composée $s_1 \circ s_2$ par sa matrice dans cette base.***
- ***Déterminer tous les vecteurs dont l’image par $s_1 \circ s_2$ est le vecteur nul.***