Intégrales curvilignes

A. L'intégrale curviligne de première espèce.

A-I. Longueur d'un élément différentiel de courbe

1. Le cas des équations paramétriques

Dans le plan supposons que les coordonnées x et y soient des fonctions continûment dérivables de la variable t. On s'intéresse à l'arc de courbe formé des points $M(x;y)$ tels que $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ où t varie de t_1 à t_2 avec $t_1 < t_2$.

Une variation infinitésimale de t provoque alors des variations infinitésimales de x et y et on peut assimiler la longueur dl de l'élément différentiel de courbe correspondant à la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont dx et dy …

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(x'(t).dt\right)^2 + \left(y'(t).dt\right)^2}$$

Si on a bien pris la précaution de ranger les valeurs de t en croissant, alors on a $dt > 0$ et on en déduit :

$$dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}.dt$$

Exemple : Supposons que $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 1 - t + t^2 \end{cases}$ on a alors (avec $dt > 0$) :

$$dl = \sqrt{4t^2 + \left(2t-1\right)^2}.dt = \sqrt{8t^2 - 4t + 1}.dt$$

Si la courbe est plongée dans l'espace, au lieu de deux coordonnées on en utilise trois… ce qui ne change rien à la méthode :

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}.dt$$

2. Le cas des équations cartésiennes

Dans le plan supposons que la coordonnée y soit une fonction continûment dérivable de la variable x. On s'intéresse à l'arc de courbe formé des points $M(x;y)$ tels que $y = f(x)$ où x varie de x_1 à x_2 avec $x_1 < x_2$.

Dans ces conditions on a $dy = f'(x).dx$ et par conséquent $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ devient :

$$dl = \sqrt{1 + (f'(x))^2}.dx$$

Ce cas ne se généralise pas aisément à l'espace…

3. Le cas des équations polaires

Dans le plan supposons que la distance à l'origine r soit une fonction continûment dérivable de l'angle polaire θ. On s'intéresse à l'arc de courbe formé des points $M(x;y)$ tels que $r = f(\theta)$ où θ varie de θ_1 à θ_2 avec $\theta_1 < \theta_2$.

Dans ces conditions on a $\begin{cases} x = r.\cos(\theta) \\ y = r.\sin(\theta) \end{cases}$ … sans oublier que r est une fonction continûment dérivable de θ. On en déduit $\begin{cases} dx = \left(r'.\cos(\theta) - r.\sin(\theta)\right).d\theta \\ dy = \left(r'.\sin(\theta) + r.\cos(\theta)\right).d\theta \end{cases}$ et par conséquent :

$dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ devient…

$$dl=\sqrt{r^2+r'^2}.d\theta$$

Ce cas ne se généralise pas aisément à l'espace…

A-II. Longueur d'un arc de courbe

L'application de la méthode de Riemann donne immédiatement la méthode pour calculer la longueur d'un arc de courbe : on le partage en éléments infinitésimaux et on « somme » les longueurs de ces éléments pour obtenir la longueur de l'arc.

Si l'arc de courbe va du point A au point B on le note $\overset{\frown}{AB}$ et on a :

$$Longueur(\overset{\frown}{AB})=\int_{\overset{\frown}{AB}} dl$$

Suivant le cas, dl s'exprime en utilisant comme variable descriptive t, ou x ou θ… et l'intégrale à calculer est une intégrale simple (c'est à dire avec une seule variable, mais pas forcément « facile » !).

A-III. Exercices

1. Quelle est la longueur de l'arc de courbe d'équation $y=\ln(x)$ où $x\in[1,e]$?

2. On donne $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=2-t^3 \end{cases}$ où $t\in[0;1]$. Quelle est la longueur de l'arc de courbe correspondant ?

3. Calculer la longueur de l'arc de courbe dont une équation polaire est $r=\theta$ où $\theta\in[0;\pi]$.

A-IV. Densité linéïque de masse, masse d'un fil matériel

a. Définition de la densité

Soit un point M sur un fil matériel. On appelle Δm la masse d'un tronçon de fil contenant M et Δl la longueur de ce tronçon… Il est clair que si $\Delta l\to 0$ alors $\Delta m\to 0$. dans ces conditions, le quotient $\frac{\Delta m}{\Delta l}$, formé de deux termes qui tendent vers 0, est indéterminé : il peut posséder une limite et si cette limite existe elle représente alors la « densité de masse » au point M.

Si le fil est homogène, la densité de masse est la même partout et s'exprime en « unité de masse par unité de longueur », par exemple en « kg/m » ou en « g/cm »… Si le fil n'est pas homogène, parce que sa composition n'est pas la même partout ou parce que sa section n'est pas constante la densité s'exprime quand même en « unité de masse par unité de longueur » mais le résultat n'est plus une constante, il dépend de l'endroit observé sur le fil.

b. Masse d'un tronçon de fil…

La position d'un point sur la courbe étant définie par la valeur de t, ou x ou θ… suivant le cas, la densité linéïque en ce point est fonction de la seule variable qui sert à décrire la courbe.

Si on note μ la densité de masse, la masse d'un tronçon de fil infinitésimal qui entoure le point M est $dm=\mu.dl$ et en appliquant la méthode de Riemann, on obtient la masse d'un tronçon de fil $\overset{\frown}{AB}$ grâce à une intégrale :

$$Masse(\overset{\frown}{AB})=m=\int_{\overset{\frown}{AB}} dm=\int_{\overset{\frown}{AB}} \mu.dl$$

Exemple :

Sur un fil matériel suivant la courbe d'équation $\begin{cases} x=\cos(t) \\ y=\sin(t) \end{cases}$ où t varie de 0 à π, la densité au point de paramètre t est $1+t^2$. Quelle est la masse du fil ?

$\mu(t) = 1 + t^2$; $dl = dt$; $dm = (1+t^2).dt$; $m = \int_{\widehat{AB}} (1+t^2).dt = \int_0^{\pi} (1+t^2).dt = \frac{\pi}{3}.(1+\pi^2)$

Exemple bis :

A-V. Exercices

1. Sur un fil matériel suivant la courbe d'équation $y = x^2$ où x varie de 0 à 1, la densité au point de paramètre x est $\sqrt{1+4x^2}$. Quelle est la masse du fil ?
2. Sur un fil matériel suivant la courbe d'équation $y = \cos(x)$ où x varie de 0 à π, la densité au point de paramètre x est $\sqrt{1+\sin^2(x)}$. Quelle est la masse du fil ?
3. Calculer la masse du fil matériel suivant la courbe d'équation $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = t \end{cases}$ où $t \in [0; 2\pi]$ sachant qu'au point de paramètre t la densité linéïque de masse est t.
4. Un fil matériel suit la courbe d'équation polaire $r = \cos(\theta)$ où $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ et sa densité linéïque de masse au point de paramètre θ est $\theta.\sin(\theta)$. Quelle est sa masse ?

A-VI. Modélisation abstraite

Cette intégrale permet de modéliser aussi bien les calculs de longueur d'une courbe que ceux de masse d'un fil non homogène, de charge électrique d'un fil où la densité de charge est variable, et plus généralement de « somme d'information » le long d'une trajectoire.

a. Dans le cas d'une courbe plane

Soient x et y deux variables indépendantes, et μ une fonction continue de x et y.

Si la courbe $\widehat{AB}$, formée des points $M(x; y)$, est lisse c'est à dire sans « rupture » ni « coude » on définit l'intégrale curviligne de μ le long de $\widehat{AB}$ par $\int_{\widehat{AB}} \mu(x; y).dl$ où $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

b. Dans le cas d'une courbe non-plane (on dit courbe « gauche »)

Soient x, y et z trois variables indépendantes, et μ une fonction continue de x, y et z.

Si la courbe $\widehat{AB}$, formée des points $M(x; y; z)$, est lisse c'est à dire sans « rupture » ni « coude » on définit l'intégrale curviligne de μ le long de $\widehat{AB}$ par $\int_{\widehat{AB}} \mu(x; y; z).dl$ où $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$.

A-VII. Exercices

1. Calculer $\int_{\widehat{AB}} (x+y).dl$ lorsque $y = -x + 2$, x variant de 0 à 1.
2. Calculer $\int_{\widehat{AB}} \cos(\theta).dl$ lorsque $r = \sin(\theta)$, θ variant de 0 à π.
3. Calculer $\int_{\widehat{AB}} x.dl$ lorsque $r = \sin(\theta)$, θ variant de 0 à π.

B. L'intégrale curviligne de deuxième espèce.

B-I. *Rappel sur la notion de travail*

Une force constante $\vec{F}$ qui se déplace de d sur une trajectoire rectiligne dirigée par $\vec{F}$ produit un travail w tel que $w=\|\vec{F}\|.d$: cette notion est abordée dans le cours de physique de 3ème.

Si la force $\vec{F}$ fait un angle constant α avec la trajectoire, le travail devient $w=\|\vec{F}\|.d.\cos(\alpha)$ c'est à dire $w=\vec{F}.\vec{d}$ … où on retrouve un produit scalaire : cette notion est développée dans le cours de physique de 2nde.

Tout le problème consiste à généraliser au cas où la force est variable en fonction de la position et la trajectoire n'est pas droite.

B-II. *Travail lors d'un déplacement différentiel*

a. Dans le plan (coordonnées x et y)

Un déplacement différentiel $\vec{dl}$ a pour coordonnées dx et dy, le champ de forces $\vec{F}$ a pour coordonnées P *et* Q (fonctions de x et y) le travail produit en déplaçant $\vec{F}$ de $\vec{dl}$ est alors dw tel que $dw=\vec{F}.\vec{dl}$

b. Dans l'espace

Un déplacement différentiel $\vec{dl}$ a pour coordonnées dx, dy et dz, le champ de forces $\vec{F}$ a pour coordonnées P, Q et R (fonctions de x, y et z) le travail produit en déplaçant $\vec{F}$ de $\vec{dl}$ est alors dw et on a encore $dw=\vec{F}.\vec{dl}$

B-III. *Travail d'un champ de forces le long d'un arc de courbe*

Soit un champ de forces $\vec{F}$ défini en tout point d'un domaine contractile et dont les coordonnées (P et Q ou bien P, Q et R) sont des fonctions continues des variables de position (x et y ou bien x, y et z).

Soit dans ce même domaine un arc de courbe d'origine A et d'extrémité B tel que, en tout point on puisse définir le vecteur tangent (on dit que l'arc de courbe est « lisse »).

Le travail du champ de forces $\vec{F}$ effectué en parcourant l'arc de courbe $\overset{\frown}{AB}$ de A vers B est le résultat de l'intégrale $\int_{\overset{\frown}{AB}}\vec{F}.\vec{dl}$, c'est à dire : $w=\int_{\overset{\frown}{AB}}dw=\int_{\overset{\frown}{AB}}\vec{F}.\vec{dl}$.

Lorsque le travail est positif on dit qu'il est globalement moteur et lorsqu'il est négatif on dit qu'il est globalement résistant.

B-IV. *Généralisation : circulation d'un champ*

Le champ peut être un champ électrique ou magnétique, ce peut aussi être un champ de vitesses (par exemple, vitesse d'un fluide en chaque point)… et on peut reproduire le même type de calcul sans que l'interprétation en terme de travail soit pertinente.

Si $\vec{E}$ désigne un champ défini en tout point d'un domaine contractile et dont les coordonnées (P et Q ou bien P, Q et R) sont des fonctions continues des variables de position (x et y ou bien x, y et z), si on a dans ce même domaine un arc de courbe lisse d'origine A et d'extrémité B, alors on appelle circulation du champ $\vec{E}$ le long de l'arc de courbe $\overset{\frown}{AB}$ le résultat de l'intégrale $\int_{\overset{\frown}{AB}}\vec{E}.\vec{dl}$.

C. Formes exactes et intégrales curvilignes.

C-I. Intégrale d'une forme exacte

Soit ω une forme exacte dans un domaine contractile et C un arc de courbe lisse contenu dans ce domaine, on peut alors écrire $\omega = df$ si bien que $\int_C \omega = \int_C df = [f]_A^B = f(B) - f(A)$.

On constate que cette intégrale dépend du point initial et du point final mais pas du tout du trajet entre ces deux points : si la courbe proposée est trop compliquée pour calculer l'intégrale, on peut la simplifier en la remplaçant par une courbe plus simple (un seul segment de droite allant « directement » du point de départ au point d'arrivée ou bien des segments de droites parallèles aux axes…)

C-II. Forme exacte et courbe fermée

Soit ω une forme exacte dans un domaine contractile et C un arc de courbe lisse et fermé contenu dans ce domaine. On peut alors écrire que $\int_C \omega = \int_C df = [f]_A^A = f(A) - f(A) = 0$.

L'intégrale d'une forme exacte le long d'une courbe lisse et fermée est toujours nulle.

D. Propriétés

D-I. Réunion de deux courbes

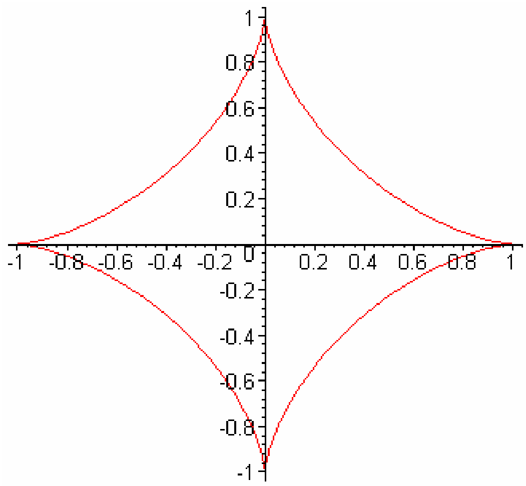
Si δ est une forme différentielle, pas forcément exacte, et si la courbe lisse C est telle que $C = \widehat{AB}$ et $E \in \widehat{AB}$ alors on a $\int_C \delta = \int_{\widehat{AE}} \delta + \int_{\widehat{EB}} \delta$.

D-II. Linéarité

Si δ_1 et δ_2 sont des formes différentielles, pas forcément exactes, et si α et β sont deux coefficients réels, on a : $\int_C \alpha\delta_1 + \beta\delta_2 = \alpha\int_C \delta_1 + \beta\int_C \delta_2$.

D-III. Exemples

1. Calcul de la longueur de l'astroïde d'équation $\begin{cases} x = \cos^3(t) \\ y = \sin^3(t) \end{cases}$ où on admet que la courbe est fermée et constituée de quatre parties de même longueur comme le montre le dessin ci-contre.



   On trouve $dl = \frac{3}{2}.|\sin(2t)|.dt$ et on obtient la longueur d'un quart d'astroïde en intégrant : $\frac{l}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dl = ... = \frac{3a}{2}$ d'où la longueur totale : $l = 6a$.

2. Calcul de la circulation $Circ.$ de $\vec{V}\begin{pmatrix} 3x \\ x+y \end{pmatrix}$ le long du cercle de centre O et de rayon 1 parcouru dans le sens direct.

   On décrit le cercle par $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$ où le paramètre varie de 0 à 2π.

On obtient $Circ. = \int_0^{2\pi} 3x.dx + (x+y).dy = \int_0^{2\pi} (x+y).dy$ car $3x.dx$ est une forme exacte et la courbe est fermée.

On termine le calcul : $Circ. = \int_0^{2\pi} (x+y).dy = \int_0^{2\pi} (\cos(t)+\sin(t)).\cos(t).dt = \pi$

3. Calcul du travail W de la force $\vec{F}\begin{pmatrix} yz \\ zx \\ xy \end{pmatrix}$ le long de l'hélice H d'équation $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = t \end{cases}$ décrite en faisant varier le paramètre de 0 à $\dfrac{\pi}{4}$.

On remarque que la forme à intégrer est la différentielle de xyz … donc… $W = \dfrac{\pi}{8}$.

E. Exercices

E-I. DS de 1996

On donne $\vec{V}(x,y,z) = \left(y^2.\cos(x)\right).\vec{i} + \left(2y.\sin(x) + e^{2z}\right).\vec{j} + \left(2y.e^{2z}\right).\vec{k}$

1. Montrer que ce champ est un champ de gradient.
2. Déterminer le potentiel U(x,y,z) dont dérive ce champ sachant qu'il vaut 1 à l'origine.
3. Quelle est la circulation de ce champ de $A(0;1;0)$ à $B(\frac{\pi}{2};3;0)$?

E-II. DS de 1978

On donne $A(1;0)$ et $B(0;1)$. C_1 désigne le segment de droite [AB] orienté de A vers B et C_2 l'arc de cercle de centre O allant de A à B. On donne $\omega = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.dx + \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.dy$.

Montrer que $\int_{C_1} \omega = \int_{C_2} \omega$ et calculer la valeur de ces intégrales.

E-III. DS de 1980

On donne $\omega = \left(1 - x^2 + y^2\right).dx + \left(1 - y^2 + x^2\right).dy$. Calculer $\int_C \omega$ où C désigne le cercle d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$ parcouru dans le sens direct.

E-IV. DS de date incertaine

On donne $\omega = \left(xy^2\right).dy - \left(yx^2\right).dx$. Calculer $\int_C \omega$ où C désigne le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2y = 0$ parcouru dans le sens indirect.

E-V. DS de 1995

On donne quatre points : $A(0;0)$; $B(0;2)$; $C(2;2)$; $D(2;0)$ et on appelle Γ le carré ABCD parcouru dans le sens A→B→C→D→A.

Calculer $\int_\Gamma (2x+3y-5).dx + (4x-y+3).dy$

Calculer $\int_\Gamma (x^2-xy^3).dx + (y^2-2xy).dy$

E-VI. DS de 2001

On donne $\omega = (2x + y - 2z).dx + (x + 2y - 2z).dy + (-2x - 2y + z).dz$

Montrer que cette forme différentielle est exacte et déterminer la fonction dont elle est la différentielle totale sachant que cette fonction vaut 2 à l'origine.

Lors du déplacement de O(0 ;0 ;0) à A(1 ;1 ;1) le travail du champ de forces $\vec{F}\begin{pmatrix} 2x + y - 2z \\ x + 2y - 2z \\ -2x - 2y + z \end{pmatrix}$ est-il globalement moteur ou résistant ?

E-VII. DS de 2001

Calculer la circulation de $\vec{V}\begin{pmatrix} \sin(y) \\ \cos(2x) \end{pmatrix}$ le long du triangle ABC parcouru dans le sens A→B→C→A et tel que $A(0;\pi)$; $B(\pi;\pi)$ et $C(0;\frac{\pi}{2})$