Formes différentielles
Notion de champ

A. Présentation et définition des formes différentielles

A-I. Rappel : différentielle et fonction à plusieurs variables

On a déjà vu que si f est une fonction à deux variables indépendantes x et y on a :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}.dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Par exemple, si $f(x;y) = x(y+x^2)$ on a $df = (y+3x^2).dx + (x).dy$

En dehors de la difficulté de calcul, il n'y a aucun problème : toute fonction à deux variables dont les dérivées partielles sont continues possède une différentielle.

Le problème est au niveau de la réciproque : connaissant une expression qui « a l'air d'être » une différentielle, peut-on retrouver la fonction dont ce serait la différentielle ?

Par exemple, si on a $\omega = (4x-y).dx + (y).dy$ peut-on trouver une fonction f telle que $df = (4x-y).dx + (y).dy$?

Si c'était le cas on devrait avoir $\frac{\partial f}{\partial x}.dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (4x-y).dx + (y).dy$ donc $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = (4x-y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = y \end{cases}$.

La première de ces conditions donne, en intégrant $f(x;y) = 2x^2 - xy + g(y)$ et en reportant dans la deuxième condition on obtient alors $-x + g'(y) = y$ c'est à dire $g'(y) = x + y$ … ce qui est contradictoire puisque le membre de gauche ne peut pas contenir x (car g est une fonction de y seulement) alors que celui de droite contient x !

Il est donc impossible de trouver une fonction f telle que $df = (4x-y).dx + (y).dy$.

Définition :

On appelle forme différentielle à deux variables indépendantes x et y toute expression de la forme $P(x;y).dx + Q(x;y).dy$.

De même, on appelle forme différentielle à trois variables indépendantes x y et z toute expression de la forme $P(x;y;z).dx + Q(x;y;z).dy + R(x;y;z).dz$.

A-II. Théorème de Schwarz

(Karl Hermann Amandus SCHWARZ, allemand, 1843-1921 …
à ne pas confondre avec le français Laurent SCHWARTZ « père des *distributions* », 1915- 4//07/2002)

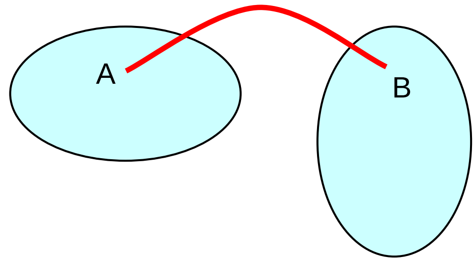
Nous admettrons le théorème suivant :

En tout point $(x_0;y_0)$ où $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues, on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0;y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$

A-III. Domaine connexe et domaine contractile.

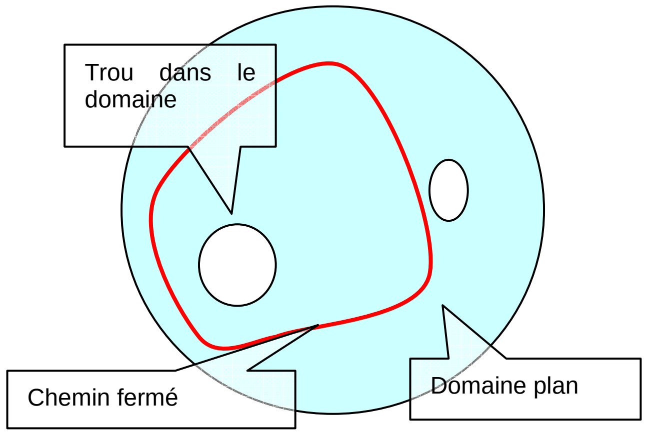
Définition : Un domaine est dit **connexe** lorsque tout couple de points de ce domaine peut être relié par une courbe qui reste entièrement dans ce domaine.

Par exemple, dans le plan, un disque est connexe, un demi plan est connexe, mais deux droites parallèles disjointes ne forment pas un domaine connexe.



Le domaine plan ci-contre est en deux parties, il n'est pas connexe : le chemin tracé doit sortir du domaine pour relier A à B.

Définition : Un domaine est dit **contractile** lorsque, quel que soit le point de ce domaine, une courbe qui part de ce point et y revient en restant dans le domaine peut être réduite, par déformation continue et sans sortir du domaine, à un seul point.



Par exemple, dans le plan une « crêpe à trous » comme le montre le dessin ci contre est connexe mais pas contractile. Dans l'espace une boule est contractile, une boule évidée (une pêche sans son noyau) est encore contractile…

La notion de domaine contractile est en fait la généralisation de la notion d'intervalle aux dimensions supérieures…

A-IV. Exercices

Les domaines suivants donnés par une description en coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormé, sont-ils contractiles :

1. Dans le plan : $1 < x^2 + y^2 < 4$
2. Dans l'espace : $1 < x^2 + y^2 < 4$
3. Dans le plan : $\begin{cases} x > 0, y > 0 \\ 1 < xy < 2 \end{cases}$
4. Dans le plan : $\begin{cases} 0 < x < 4 \\ 0 < y < \sqrt{x} \end{cases}$
5. Dans l'espace : $1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4$

B. Formes exactes, intégrales d'une forme exacte

B-I. Classification des formes différentielles

Si ω est une forme différentielle, on dit que ω est une **forme exacte** dans un domaine D lorsqu'on peut trouver une fonction f telle que $df = \omega$ dans ce domaine.

L'utilisation du théorème de Schwarz permet comprendre l'énoncé de la propriété suivante :

Si $\omega = P(x;y).dx + Q(x;y).dy$ est une forme exacte, alors on a $df = P(x;y).dx + Q(x;y).dy$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x} = P(x;y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = Q(x;y)$ …si bien que, d'après le théorème de Schwarz on s'attend à ce que : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial P(x;y)}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial Q(x;y)}{\partial x}$ donnent des résultats égaux… d'où :

Propriété caractéristique (admise) :

Si $\omega = P(x;y).dx + Q(x;y).dy$ est définie dans un domaine contractile D et si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ alors ω est une forme exacte dans D.

Si $\omega = P(x;y;z).dx + Q(x;y;z).dy + R(x;y;z).dz$ est définie dans un domaine contractile D et si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$ alors ω est une forme exacte dans D.

Lorsqu'une forme différentielle est exacte, il est raisonnable de se demander « de quelle fonction est-ce la différentielle ? » mais si elle ne l'est pas la question est sans objet !

B-II. Comment intégrer une forme exacte ?

On utilise la méthode vue dans la présentation… ou une heuristique si c'est possible :

- Exemple1 : On donne $\omega = x.dx + y.dy$. Cette forme est-elle exacte, si oui trouver f telle que $df = \omega$.

ω est définie dans $\mathbb{R}^2$ qui est contractile.

On a « évidemment » $\omega = d\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$ donc ω est exacte.

- Exemple2 : On donne $\omega = y.dx + x.dy$. Cette forme est-elle exacte, si oui trouver f telle que $df = \omega$.

ω est définie dans $\mathbb{R}^2$ qui est contractile.

On a « évidemment » $\omega = d(xy)$ donc ω est exacte.

- Exemple3 : On donne $\omega = y(1+2x).dx + x(1+x).dy$. Cette forme est-elle exacte, si oui trouver f telle que $df = \omega$.

ω est définie dans $\mathbb{R}^2$ qui est contractile.

Supposons que $\frac{\partial f}{\partial x} \underset{(1)}{=} y(1+2x)$ et que $\frac{\partial f}{\partial y} \underset{(2)}{=} x(1+x)$ on aurait alors :

$(1) \Rightarrow f(x;y) = y(x+x^2) + g(y)$ puis dans (2) $x + x^2 + g'(y) = x(1+x)$ d'où … $g(y) = Cste$

Conclusion : $f(x;y) = y(x+x^2) + Cste$.

- Exemple4 : On donne $\omega = y(1+2x).dx + x(1+x).dy + (z+1).dz$

On pose $P = y(1+2x)$; $Q = (1+x)$; $R = (z+1)$ et on a : $\frac{\partial P}{\partial y} = 1+2x$ et $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$… et cela suffit pour être sûr que la forme différentielle n'est pas exacte donc on ne cherche pas de qui ce pourrait être la différentielle.

Remarque : La notation différentielle et la notation intégrale permette d'écrire que, si ω est une forme exacte dans un domaine contractile, telle que $df = \omega$ on a alors $\int \omega = \int df = f + cste$.

B-III. Exercices

Intégrer les formes différentielles suivantes si elles sont exactes :

$\omega_1 = (4x + xy^2)dx + (x^2y - 1 + y^3)dy$	$\omega_2 = \frac{x}{1+y^2}dx + (y-1)dy$

$\omega_3 = (4x+\sin(x))dx + (y - \text{Arcsin}(y) + e^y)dy$	$\omega_4 = \frac{1}{1+z^2}\left(6dx + 2ydy - \frac{2z}{1+z^2}dz\right)$

C. Champ vectoriel : Gradient, champ de gradient.

C-I. Rappel

Si f est une fonction de deux variables indépendantes x et y on appelle gradient de f et on note $\overrightarrow{grad}(f)$ le vecteur de coordonnées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

De même si f est une fonction de trois variables indépendantes $x; y$ et z on appelle gradient de f et on note $\overrightarrow{grad}(f)$ le vecteur de coordonnées $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

C-II. Champ de gradient et forme exacte

a. Le cas « à deux dimensions ».

Soit $\vec{V}\begin{pmatrix} P(x;y) \\ Q(x;y) \end{pmatrix}$ un champ vectoriel défini en tout point $M(x;y)$ d'un domaine contractile du plan. Ce champ est un champ de gradient à condition qu'on puisse trouver une fonction $f(x;y)$ qui vérifie $\frac{\partial f}{\partial x} = P(x;y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x;y)$ …c'est à dire à condition que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

b. Le cas « à trois dimensions ».

Soit $\vec{V}\begin{pmatrix} P(x;y;z) \\ Q(x;y;z) \\ R(x;y;z) \end{pmatrix}$ un champ vectoriel défini en tout point $M(x;y;z)$ d'un domaine contractile de l'espace. Ce champ est un champ de gradient à condition qu'on puisse trouver une fonction $f(x;y;z)$ qui vérifie $\frac{\partial f}{\partial x} = P(x;y;z)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x;y;z)$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = R(x;y;z)$ …c'est à dire à condition que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$.

Remarque : En physique on rencontre fréquemment des champs tels que $\vec{V} = -\overrightarrow{grad}(f)$ par exemple, le champ électrique $\vec{E}$ et le potentiel électrique U sont liés par $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(U)$. Dans ce cas on dit que le champ $\vec{V}$ **dérive du potentiel** f.

Vocabulaire à bien comprendre :

Finalement, si on donne $\vec{V}\begin{pmatrix} P(x;y) \\ Q(x;y) \end{pmatrix}$ ou $\omega = P(x;y).dx + Q(x;y).dy$ il revient au même de poser les questions :

- Montrer que $\vec{V}$ est un champ de gradient.
- Montrer que $\vec{V}$ est un champ qui dérive d'un potentiel.
- Montrer que ω est une forme exacte.

Et bien entendu en dimension 3 l'adaptation est immédiate :

si on donne $\vec{V}\begin{pmatrix} P(x;y;z) \\ Q(x;y;z) \\ R(x;y;z) \end{pmatrix}$ ou $\omega = P(x;y;z).dx + Q(x;y;z).dy + R(x;y;z).dz$ il revient au même de poser les questions :

- Montrer que $\vec{V}$ est un champ de gradient.
- Montrer que $\vec{V}$ est un champ qui dérive d'un potentiel.
- Montrer que ω est une forme exacte.

C-III. Exercices

1. On définit en tout point $M(x;y;z)$ d'un domaine contractile de l'espace ne contenant pas l'origine un champ $\vec{E}$ tel que $\vec{E} = k.\dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$. Montrer que ce champ dérive d'un potentiel dans tout domaine contractile ne contenant pas l'origine, et préciser ce potentiel sachant qu'il est nul à l'infini.

2. On donne le champ vectoriel $\vec{V}\begin{pmatrix} 1+2xy \\ x^2-3 \end{pmatrix}$. Ce champ est-il un champ de gradient ?

3. On donne le champ vectoriel $\vec{V}\begin{pmatrix} x.\cos(y) \\ \sin(y) \end{pmatrix}$. Si ce champ dérive potentiel, préciser lequel…

4. Quel est le champ vectoriel qui dérive du potentiel $U(x;y;z) = 1 + x + xy + xyz$?

5. Le champ vectoriel $\vec{V}\begin{pmatrix} \dfrac{x}{(1+y^2)\sqrt{x^2+z^2}} \\ \dfrac{-2y\sqrt{x^2+z^2}}{(1+y^2)^2} \\ \dfrac{z}{(1+y^2)\sqrt{x^2+z^2}} \end{pmatrix}$ dérive d'un potentiel nul à l'origine : combien vaut ce potentiel au point (1 ;1 ;1) ?