

A. Intégrale de Riemann

Calculer les intégrales suivantes.

$I_1 = \int_0^1 \frac{7x}{1+4x^2} dx$	$I_2 = \int_0^1 \frac{-1}{1+4x^2} dx$	$I_3 = \int_0^1 \frac{1+3x}{16+4x^2} dx$
$I_4 = \int_0^1 \ln(2+x) \cdot \frac{dx}{2+x}$	$I_5 = \int \text{Arcsin}(x) \cdot dx$	$I_6 = \int \frac{(2x^3 - x - 3)dx}{1-x^2}$ où on pourra remarquer que $1-x^2 = (\dots)(\dots)$

B. Applications des intégrales

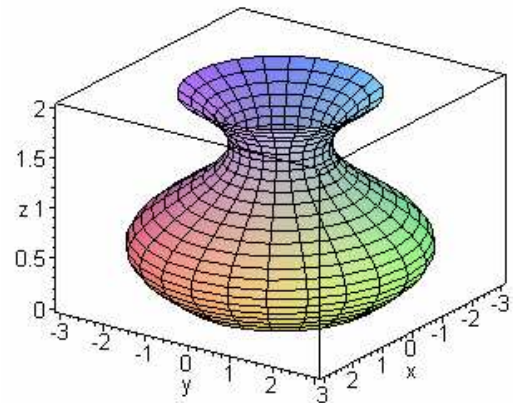
B-I. Volume, débit, vitesse

L'espace est muni d'un repère orthonormé $Oxyz$.

Un vase est obtenu en faisant tourner autour de l'axe des cotes (Oz) la courbe du plan yOz dont une équation est $y = 2 + \sin(\pi z)$ où z varie de 0 à 2.

Calculer le volume de ce vase en utilisant un découpage en tranches horizontales assimilables à des cylindres.

A l'instant $t = 0$ le vase est vide et on le remplit d'eau, avec un débit constant de 3 (unités de volume par unité de temps). A quelle vitesse monte le niveau de l'eau en passant à la hauteur 1,5 ?

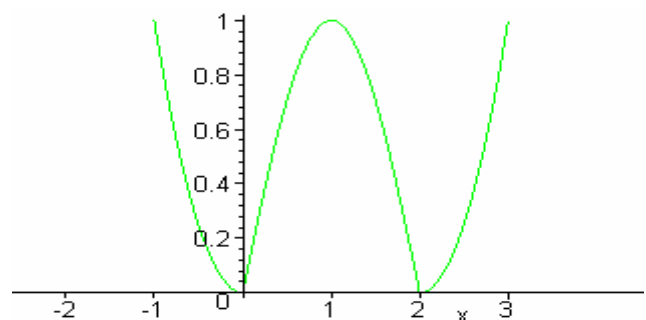


B-II. Valeur moyenne

La fonction f , de période 4, est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [-1; 0[\\ \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{si } x \in [0; 2[\\ (x-2)^2 & \text{si } x \in [2; 3[\end{cases}$$

Une partie de sa représentation graphique est donnée ci-contre.



- Quelle est la valeur de $f(2007)$?
- Quelle est la valeur moyenne m de cette fonction ?

B-III. Développement limité et intégrale

On pose $F(x) = \int_0^x \frac{\ln(\cos(t))}{1+t^3} dt$.

- Combien vaut $F(0)$.

- b. On souhaite calculer $F(0,1)$, et comme le calcul de l'intégrale est « infaisable » de façon traditionnelle, on va chercher un DL4 de $\frac{\ln(\cos(t))}{1+t^3}$ au voisinage de 0, en déduire un DL5 de $F(x)$ toujours au voisinage de 0 et utiliser ce DL5 pour calculer « au mieux » $F(0,1)$.
Donnez votre résultat en arrondissant à 10^{-5} près.

C. Equations différentielles du 1^{er} ordre

C-I. Résolutions classiques

Résoudre les équations suivantes où y est une fonction inconnue de la variable x .

$E_1 : (1+x)y' + (1-x)y = 1 + 2x - x^2$	$E_2 : (1+x^2)y' - 2x.y = x + x^3$
---	------------------------------------

C-II. Développement limité et équation différentielle

On s'intéresse à l'équation $y' + xy = e^{\sin(x)} - 1$ où y est une fonction inconnue de la variable x vérifiant $y(0) = 2$. Le but est de calculer la valeur de $y(-0,02)$.

Comme la résolution traditionnelle de cette équation est « infaisable » on va passer par les DL : En supposant que y possède un DL3 au voisinage de 0, préciser au mieux ce DL3, en déduire une valeur approchée de $y(-0,1)$ à 10^{-3} près.

D. Equations différentielles du 2nd ordre

D-I. Résolutions classiques

Résoudre les équations suivantes où y est une fonction inconnue de la variable x .

$E_1 : 5y'' + 4y' - y = x + e^{-x}$	$E_2 : y'' + y' + 2y = x \cos(x)$
-------------------------------------	-----------------------------------

D-II. Application physique (HORS SUJET : ne pas traiter)

Barème approximatif.

AI	BI	BII	BIII	CI	CII	DI	DII	Total
5	2	1,5	2,5	4,5	2	3,5	0	21

E. Formulaire pour les développements limités usuels

E-I. Au voisinage de 0 on a :

$$1) e^x = 1 + \frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \cdot \mathcal{E}(x)$$

$$2) \operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1} \cdot \mathcal{E}(x)$$

$$3) \operatorname{sh}(x) = \frac{x^1}{1} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2} \cdot \mathcal{E}(x)$$

$$4) \sin(x) = \frac{x^1}{1} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2} \cdot \mathcal{E}(x)$$

$$5) \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1} \cdot \mathcal{E}(x)$$

$$6) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + x^n \cdot \mathcal{E}(x)$$

$$7) (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot x^3}{6} + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1) \cdot x^n}{n!} + x^n \cdot \mathcal{E}(x)$$

8) Applications du développement précédent :

$$\square \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n \cdot x^n + x^n \cdot \mathcal{E}(x)$$

$$\square \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^n \cdot \mathcal{E}(x)$$

$$\square \quad \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}x^3 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n \cdot n!}x^n + x^n \cdot \mathcal{E}(x)$$

$$\square \quad \sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}x^3 - \dots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n \cdot n!}x^n + x^n \cdot \mathcal{E}(x)$$

$$\square \quad \text{et de même pour } \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} \text{ ou } \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} \dots$$

E-II. Changement de référence :

On pose $g(h) = f(x_0 + h)$.

On dit que $f(x)$ possède un développement limité au voisinage de x_0 lorsque $g(h)$ possède un développement limité au voisinage de 0.