

Dans tout ce sujet l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où les coordonnées sont nommées x, y et z et le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) où les coordonnées sont nommées x et y .

A. Géométrie

A-I. Coordonnées d'un projeté

On donne trois points $A(-2; 0; 1)$, $B(4; 2; 1)$, $C(0; 2; 5)$.

Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonal de l'origine O sur le plan (ABC) .

A-II. Cercle circonscrit, axe d'un cercle

On rappelle que le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point d'intersection des médiatrices de ce triangle. On rappelle aussi le plan médiateur d'un segment est le plan qui passe par le milieu de ce segment en étant orthogonal à ce segment. Le but de l'exercice est de déterminer le rayon du cercle circonscrit à un triangle dans l'espace.

On donne trois points $A(-2; 0; 1)$, $B(4; 2; 1)$, $C(0; 2; 5)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur de $[AB]$ que l'on appelle P_1 .
2. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur de $[BC]$ que l'on appelle P_2 .
3. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .
4. Quel est le centre puis le rayon du cercle Ψ (se lit « psi ») circonscrit au triangle (ABC) ?
5. Si un point $M(x; y; z)$ est sur l'axe de ce cercle Ψ que peut-on dire de x, y et z ? En déduire les coordonnées du point I où l'axe du cercle Ψ perce le plan xOy .

B. Différentielle et dérivée

B-I. Vitesse d'un projeté

Dans le plan, le point $M(x; y)$ se déplace sur la courbe C .

1. La courbe C a pour équation $y = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ et, en passant à l'abscisse 2, la vitesse du projeté sur l'axe des abscisses est $\sqrt{6}$. Quelle est la vitesse de son projeté sur l'axe des ordonnées ?
2. La courbe C a pour équation $\begin{cases} x = 2u^2 + 1 \\ y = u^3 - u^2 \end{cases}$ où $u = e^t$, t désignant le temps. Montrer qu'il existe un instant t_0 et un seul où la vitesse du projeté sur l'axe des abscisses et celle du projeté sur l'axe des ordonnées sont égales. On précisera la valeur de t_0 .

B-II. Estimation

Une fonction f est inconnue mais on sait que $f(0) = -3,4$ et $f'(0) = 2,5$. Estimer $f(0,03)$.

C. Intégrale de Riemann

C-I. Un cas concret

Un compteur électrique enregistre l'intensité du courant qui le traverse toutes les 10 secondes pendant une minute. On obtient les résultats suivants :

t= (en secondes)	0	10	20	30	40	50	60
i= (en mA)	25	28	32	41	39	31	30

1. En utilisant une somme, donner une estimation de la quantité d'électricité qui a traversé le compteur durant la minute d'observation. Comme plusieurs réponses sont possibles, on explicitera la méthode employée et les choix faits en quelques lignes (pas plus de 5 lignes !).
2. On estime alors que l'intensité suit approximativement la fonction : $i(t) = 0,5107.t + 22,679$ recalculer, par une intégrale, la quantité de courant qui a traversé le compteur au cours de la minute d'observation.

C-II. Riemann

1. Quelle est la somme de Riemann dont la limite donne $\int_0^2 \frac{1}{x+2} .dx$ si on utilise un partage de l'intervalle d'intégration en n sous intervalles avec calcul des images aux bornes gauches des sous intervalles ?
2. Quelle est la somme de Riemann dont la limite donne $\int_0^{\ln(2)} e^x .dx$ si on utilise un partage de l'intervalle d'intégration en n sous intervalles avec calcul des images aux bornes droites des sous intervalles ?
3. Déterminer les deux limites suivantes en utilisant des intégrales :

$L_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + i \frac{5}{n} \right)$	$L_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + i \frac{3}{n} \right)$
--	--

C-III. Intégrales élémentaires

Calculer les intégrales « faciles » suivantes :

$I_1 = \int_0^2 \frac{1}{x-3} .dx$	$I_2 = \int_0^{\ln(2)} e^{2x} .dx$	$I_3 = \int_0^1 \frac{2}{1+x^2} .dx$
$I_4 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .dx$	$I_5 = \int_0^{\pi} \sin^2(x) .dx$	$I_6 = \int_0^1 \frac{8x^2 + x + 1}{x^2 + 1} .dx$

C-IV. Et un calcul de volume

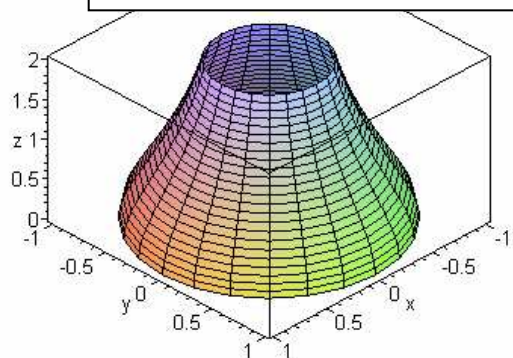
Dans l'espace, la courbe C du plan yOz a pour

équation $y = \sqrt{\frac{1}{1+z^2}}$ où z varie entre 0 et 2.

A partir de chaque point de cette courbe on trace un cercle d'axe Oz ... et on obtient ainsi le solide de révolution représenté ci-contre :

En découpant ce volume en tranches (assimilables à des cylindres) comprises entre les plans d'équations $z = h$ et $z = h + dh$, calculer le volume du solide.

with(plots):
cylinderplot(sqrt(1/(1+z^2)),theta=0..2*Pi,z=0..2);



Barème

AI	AII	BI	BII	CI	CII	CIII	CIV	Total
2,5	4	2,5	1	2,25	3	3,75	2	21