

A. Développements limités

A-I. Développements au voisinage de 0

a. Tangente...

On donne $\tan(x) = x + x.\mathcal{E}(x)$.

En déduire successivement un développement à l'ordre 2 de $1 + \tan^2(x)$, un développement à l'ordre 3 de $\tan(x)$, un développement à l'ordre 4 de $1 + \tan^2(x)$ et un développement à l'ordre 5 de $\tan(x)$.

b. Quotient...

Ecrire un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 pour $\frac{2}{1 + \cos(4x)}$.

Pourquoi est-on sûr que ce développement est celui de $1 + \tan^2(2x)$? En déduire un développement de $\tan(2x)$.

c. Composée...

Former un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\sin(e^x - 1)$

d. Une application aux limites...

Former un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\sin(x^2)$ puis, toujours à l'ordre 4, de $\sin^2(x)$.

En déduire un développement de $\sin(x^2) - \sin^2(x)$ puis la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - \sin^2(x)}{x^4}$.

e. Et une autre

En calculant un développement limité d'ordre bien choisi, déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\ln(1+x))}{1 - \cos(x)}$

A-II. Application à une équation différentielle

Une fonction inconnue y (dérivable en 0 au moins trois fois successivement) dépend de la variable x et vérifie l'équation différentielle $y'' \cdot \sin(x) + y = e^x$.

On suppose que y a pour développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 : $a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + x^3 \cdot \mathcal{E}(x)$

1. Montrer que $y(0)$ est déterminé. (Autrement dit : « Combien vaut $y(0)$? »)
2. Quel développement peut-on écrire pour y'' , puis pour $y'' \cdot \sin(x)$, et enfin pour $y'' \cdot \sin(x) + y$?
3. Si $y'(0) = 1$, combien vaut $y''(0)$?

A-III. Intégrales et développement limité

1. Calculer $\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 2x + 5} dx$

2. Former un DL2 en 0 de $\frac{2x^2 - 1}{x^2 - 2x + 5}$ puis un DL3 en 0 de $\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 2x + 5} dx$. Comment pourrait-on vérifier ce dernier résultat ? (On ne demande pas de le faire mais d'expliquer comment on pourrait le faire.)

B. Equations différentielles

B-I. Premier ordre

Résoudre les équations suivantes :

- 1) $2y' + 5y = 2x - 1$
- 2) $4xy' - y = 4x^{\frac{1}{4}}$ (x étant un réel strictement positif)
- 3) $\left(\frac{1}{4x} + \frac{x}{4}\right)y' + y = 0$

B-II. Deuxième ordre

a. Résoudre les équations suivantes :

- 1) $3y'' - 2y' - y = 4$
- 2) $3y'' - 2y' - y = e^x$
- 3) $3y'' - 2y' - y = 4 + e^x$
- 4) $3y'' - 2y' - y = 4 + e^x$ sachant que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$

b. Résoudre les équations suivantes :

- 1) $y'' + y' + y = 2x$
- 2) $y'' + y' + y = 1 + \sin(2x)$

Barème provisoire susceptible de modifications au vu des premières corrections...

AI					AII	AIII	BI	BII		Total
a)	b)	c)	d)	e)				a)	b)	
1,5	2	1	1,25	2,25	2,5	3,5	5,75	5	4,25	29

Note = arrondi au demi point (NbPoints *20 / 29)