

Tous documents interdits sauf les calculettes non-graphiques et non-programmables
ainsi que les formulaires fournis... et repris en fin d'épreuve.

Ne vous précipitez pas, soignez les questions que vous savez traiter, n'essayez pas à tout prix d'arriver au bout...

A. Intégrale de Riemann

Avec barème

A-I. Calcul de $I_1 = \int_0^1 x^2 \cdot \sqrt{1+2x^3} \cdot dx$

Choisir la méthode... et effectuer le calcul.

A-II. Calcul de $I_2 = \int_0^1 x^2 \cdot \text{Arctan}(x) \cdot dx$

En utilisant une IPP puis une décomposition en somme... effectuer le calcul.

A-III. Dédire un résultat d'un autre...

On donne $\int e^x \cdot \sin(x) \cdot dx = \frac{1}{2} e^x (\sin(x) - \cos(x)) + Cste$ et on pose $F(x) = \int e^x \cdot \sin(x) \cdot dx$, en déduire l'expression de $G(x) = \int e^{nx} \cdot \sin(nx) \cdot dx$.

A-IV. Calcul de $I_4(x) = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot dx$

1. Montrer que $\frac{1}{u^2-1}$ peut se décomposer en une somme de deux fractions de la forme

$$\frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}.$$

2. Que devient l'expression $\frac{\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)} \cdot d\theta$ lorsque $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}[$, si on pose $u = \sin(\theta)$?

3. Calculer $I_4(x)$

B. Applications du calcul intégral

B-I. Valeur moyenne et valeur efficace

1. Calculer les valeurs moyennes de x de e^x et de $x \cdot e^x$ dans l'intervalle $[0;1]$. Que pensez-vous de l'affirmation « la valeur moyenne du produit de deux fonctions est le produit de leurs valeurs moyennes » ?

2. Calculer les valeurs efficaces de x de e^x et de $x \cdot e^x$ dans l'intervalle $[0;1]$. Que pensez-vous de l'affirmation « la valeur efficace du produit de deux fonctions est le produit de leurs valeurs efficaces » ?

B-II. Intégrale généralisée

Calculer $J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{3+4x^2} dx$

C. Développements limités

C-I. Application des DLn aux limites

Former un DL4 au voisinage de 0 de $\ln(\cos(x))$ puis de $\frac{x^2}{2} + \ln(\cos(x))$ et en déduire la

valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + \ln(\cos(x))}{x^4}$

C-II. Déduire un DL d'un autre...

On pose $F(x) = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2x} . dx$. Déterminer un DL3 de $F(x)$ au voisinage de 0 en

commençant par déterminer un DL2 de $\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+2x}$ au voisinage de 0. Donner une valeur

approchée à 0,001 près de $F\left(\frac{1}{10}\right)$ sachant que $F(0) = -1$

D. Equations différentielles

D-I. Premier ordre : y est une fonction inconnue de la variable x

1. Résoudre l'équation $(2x+1)y' + y = 2$

2. Déterminer la valeur de $y(\sqrt{3})$ sachant que $\begin{cases} y(0) = 1 \\ (1+x^2)y' - xy = \frac{x}{y} \end{cases}$

3. Résoudre l'équation $xy' - y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

D-II. Deuxième ordre : y est une fonction inconnue de la variable x

1. Résoudre l'équation $2y'' + y' - 3y = x + 2.e^x$.

2. Résoudre l'équation $4y'' + y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Barème provisoire :

AI	AII	AIII	AIV	BI	BII	CI	CII	DI	DII	Total
1	1,5	1	2,5	2	1,5	1,5	2,25	5,5	3,5	22,25

**Le sujet est prévu pour 2h30... donc 1point correspond à environ 7min de travail.
Un corrigé est disponible en fin d'épreuve**