

A. Outils géométriques en repère orthonormé

On utilise dans l'espace usuel le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct.

A-I. Calculs élémentaires

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans les cas suivants :

1) $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ et $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

2) $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{k}$ et $\vec{v} = \frac{-1}{2}(\vec{i} - \vec{j})$

A-II. Applications immédiates

On donne les points $A(-1;1;0)$, $B(0;1;2)$, $C(-1;2;1)$, $D(0;0;2)$

- 1) Former une équation du plan ABC .
- 2) Quelle est l'aire du triangle ABC ?
- 3) Quel est le volume du pavé oblique dont trois arêtes sont AB, AC, AD ?
- 4) Quelle est la distance du point D au plan ABC ?

A-III. Applications moins immédiates

On utilise les mêmes points $A(-1;1;0)$, $B(0;1;2)$, $C(-1;2;1)$ que dans le AII

- 1) Quelle est la distance de A à la droite BC ?
- 2) Quelles sont les coordonnées du point H projeté de A sur la droite BC ?
- 3) Quelle est la distance de O au plan ABC ?
- 4) Quelles sont les coordonnées du point I projeté de O sur le plan ABC ?

B. Et sans repère orthonormé...

B-I. Dans le plan, sans repère

Deux vecteurs du plan \vec{u} et \vec{v} vérifient les conditions $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$, $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$.

- 1) Calculer les produits scalaires suivants : $PS_1 = \vec{u} \cdot \vec{v}$; $PS_2 = 2\vec{u} \cdot (\vec{u} - 3\vec{v})$; $PS_3 = (-\vec{u} + \vec{v}) \cdot (3\vec{u} + \vec{v})$
- 2) Montrer qu'il existe deux valeurs du réel a telles que $a\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} + a\vec{v}$ soient orthogonaux.
- 3) Calculer les normes des produits vectoriels suivants : $PV_1 = \vec{u} \wedge \vec{v}$; $PV_2 = (2\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - 3\vec{v})$
- 4) Montrer qu'il existe deux valeurs du réel a telles que $a\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} + a\vec{v}$ soient colinéaires.

B-II. Avec un repère de l'espace orthogonal mais pas normé

On utilise dans l'espace usuel le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthogonal et direct mais tel que

$$\|\vec{i}\| = 1; \|\vec{j}\| = 2; \|\vec{k}\| = 3 \text{ et dans ce repère on a } \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} :$$

- 1) Exprimer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}'$ en fonction des coordonnées de \vec{u} et \vec{u}'
- 2) Exprimer le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ en fonction des coordonnées de \vec{u} et \vec{u}'

C. Dérivées et différentielles

C-I. En électricité...

La batterie de la voiture de M. L est déchargée : il connecte un chargeur au bornes de la batterie et la quantité d'électricité accumulée vérifie la relation $Q(t) = 40 - e^{-4t}$ où $Q(t)$ est exprimé en Ah (*ampère×heure*) et t en heures.

- 1) Sachant que l'intensité du courant électrique est la dérivée de la quantité d'électricité par rapport au temps, déterminer à 0.1 près l'intensité du courant de charge au bout d'une heure de charge puis au bout de 8 heures de charge.
- 2) Sachant que la connexion du chargeur à la batterie est faite à l'instant $T = 23h$, estimer la quantité d'électricité en Ah à 0,1 près qui rentre dans la batterie le lendemain matin entre les instants $T = 7h$ et $T = 7h6min$

C-II. Remplissage d'un vase tronconique

Un vase tronconique (voir dessin ci-contre) a une base de rayon R et une hauteur H . Le volume d'eau qu'il contient est fonction de la hauteur h atteinte par l'eau suivant la relation

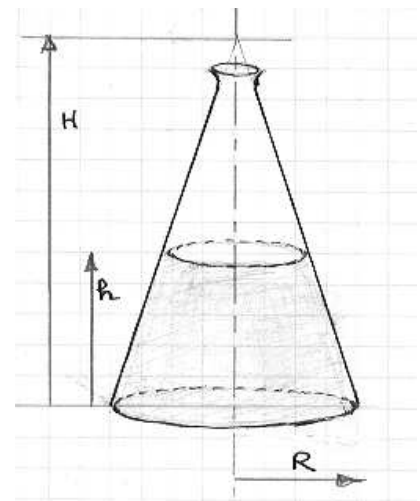
$$V = \frac{\pi R^3 H}{3} \left(1 - \left(1 - \frac{h}{H} \right)^3 \right) \text{ où } h \text{ est exprimé en dm et } V \text{ en dm}^3.$$

On remplit ce vase à l'aide d'un robinet dont le débit est constant.

- 1) Quelle relation y a-t-il entre le débit du robinet et la vitesse de montée du niveau de l'eau dans le vase ?

A partir d'ici, il s'agit d'applications numériques avec les données : $R = 12 \text{ cm}$ et $H = 30 \text{ cm}$.

- 2) Si, en atteignant la hauteur $h = 10 \text{ cm}$ le niveau d'eau monte à la vitesse de 80 cm/min quel est le débit du robinet ?
- 3) Quelle est, avec ce débit, la vitesse de montée du niveau à la hauteur $h = 20 \text{ cm}$?



C-III. Calculs systématiques

Pour chacune des fonctions suivantes, exprimer la différentielle :

1) $f(x) = \frac{\tan(x)}{x}$	2) $f(u) = \tan\left(\frac{1}{\text{Arctan}(u)}\right)$	3) $f(z) = z \cdot \text{Arctan}(\sqrt{z})$
4) $f(2m) = \frac{2 \cdot \tan(m)}{1 - \tan^2(m)}$	5) $f(2t) = \frac{1 - \tan^2(t)}{1 + \tan^2(t)}$	6) $f(s) = \frac{2 \tan(s)}{1 + \tan^2(s)}$

Barème provisoire

AI	AII	AIII	BI	BII	CI	CII	CIII	Total
1	3	4	3	3	3	3	3	23