

A. Quelques intégrales

A-I. Calculs élémentaires

Calculer

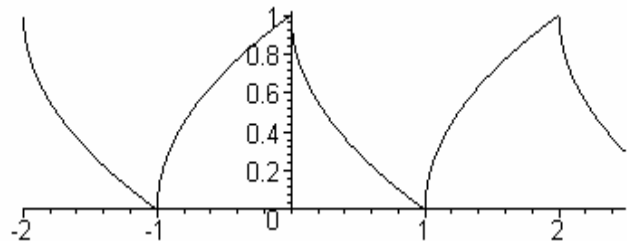
$I_1 = \int \frac{2x+5}{1+x^2} .dx$	$I_2 = \int \frac{2x+5}{9+x^2} .dx$	$I_3 = \int \frac{x^2+4}{9+2x+x^2} .dx$
$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x) \cdot \sin(x)}{1+\cos(x)} .dx$ en utilisant $\cos(x)$ comme nouvelle variable		
$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \sin(x) .dx$	$I_6 = \int_{-1}^0 \sqrt{x+1} .dx$	$I_7 = \int_0^1 (1-\sqrt{x}) .dx$

A-II. Applications des calculs précédents

- a) Quelle est la valeur moyenne m_a de $f(x) = \frac{2x+5}{1+x^2}$ dans l'intervalle $[0 ; 1]$
- b) Quelle est la valeur moyenne m_b de $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ dans l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}]$
- c) Quelle est la valeur efficace v de la fonction de **période 2** représentée ci-contre et définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^4 & \text{si } x \in [-1; 0[\\ \sqrt{1-\sqrt{x}} & \text{si } x \in [0; 1[\end{cases}$$

(On rappelle que la valeur efficace d'une fonction est la racine carrée de la valeur moyenne du carré de cette fonction)



B. Polynômes

B-I. Factorisations élémentaires

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes :

$P_1(x) = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 5$	$P_2(x) = 4x^4 + x^2 + 4$	$P_3(x) = x^4 + 4x^2 + 4$
---------------------------------	---------------------------	---------------------------

B-II. Factorisations et racines multiples

Factoriser $P(x) = 3x^4 - 17x^3 + 30x^2 - 12x - 8$ en remarquant que 2 est une racine.

C. Développements limités

C-I. Technique de base

- Rappeler la formule de Taylor avec reste d'Young (celle qui donne les développements limités en 0).
- On donne $f(x) = 4x^5 - x^4 + 2x^3 - x$. Appliquer la formule de Taylor à cette fonction pour en déduire un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0. Pouvait-on s'attendre au résultat ?

C-II. Quelques développements banals

- a) Former un DL4 de $\frac{\ln(1+x)}{x}$ au voisinage de 0
- b) Former un DL4 de $\frac{\sqrt{1+x}}{1-x^2}$ au voisinage de 0

D. Equations différentielles

D-I. Premier ordre

Résoudre les équations suivantes où y est une fonction inconnue de la variable x .

- a) $y' y^2 = x$
- b) $\frac{y'}{y^2} = 1$
- c) $(x+1)y' - x^2 y = x^2$ (on évitera la méthode de Lagrange...)
- d) $y' - y = e^x \cdot \cos(x)$ (on utilisera la méthode de Lagrange...)

D-II. Deuxième ordre

Résoudre les équations suivantes où y est une fonction inconnue de la variable x .

- a) $2y'' + y' - y = x + 2$
- b) $y'' + y' - 2y = 2e^x$

Pour ce dernier cas, on justifiera pourquoi la recherche d'une solution particulière se fait sous la forme $y = xae^x$.

Développements limités usuels au voisinage de 0 :

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \cdot \mathcal{E}(x)$$

$$\sin(x) = \frac{x^1}{1} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2} \cdot \mathcal{E}(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1} \cdot \mathcal{E}(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + x^n \cdot \mathcal{E}(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot x^3}{6} + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1) \cdot x^n}{n!} + x^n \cdot \mathcal{E}(x)$$

En particulier pour $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4 \cdot 2!}x^2 + \frac{1 \times 3}{2^3 \cdot 3!}x^3 - \frac{1 \times 3 \times 5}{2^4 \cdot 4!}x^4 + \dots + \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2^n \cdot n!}x^n + x^n \cdot \mathcal{E}(x)$$

Barème approximatif

AI	AII	BI	BII	CI	CII	DI	DII	Total
5	2	2,25	1,25	1	3	4	3	21,5