IUT ORSAY. DEVOIR SURVEILLE n°2 Semestre S1

Mesures Physiques (durée 2h) 28 novembre 2005

Tous documents interdits sauf les calculettes non-graphiques et non-programmables ainsi que les formulaires fournis… et repris en fin d'épreuve.

Vous n'êtes pas obligé de traiter les questions dans l'ordre mais par pitié, respectez la numérotation !

A.Complexes

A-I. Euler…

On donne $z = \dfrac{2e^{j\frac{\pi}{6}} - 2}{e^{j2\alpha} + j}$. Quel est le module de z^4 ?

A-II. Second degré sans Euler…

On souhaite trouver les complexes z tels que $z^2 = 2+3j$.

- En utilisant l'écriture algébrique $z = a + jb$, que peut-on dire de la partie réelle de z^2 ?

Et que peut-on dire du module de z^2 ?

- En déduire les valeurs possibles de a puis donner toutes les solutions de l'équation $z^2 = 2+3j$.
- En utilisant la question précédente, résoudre l'équation $z^2 - 4\sqrt{2}z = 12j$.

Bien sûr, z n'est pas sous la racine !

A-III. Somme de complexes

On pose $S = 1 + e^{j\frac{\pi}{6}} + e^{j\frac{2\pi}{6}} + e^{j\frac{3\pi}{6}} + ... + e^{j(n-1)\frac{\pi}{6}}$.

Exprimer S en fonction n sans signe $\sum$ ni points de suspension.

En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{5} \cos(k\dfrac{\pi}{6})$.

A-IV. Produit de complexes

On pose $P = 1 \times e^{j\frac{\pi}{6}} \times e^{j\frac{2\pi}{6}} \times e^{j\frac{3\pi}{6}} \times ... \times e^{j(n-1)\frac{\pi}{6}}$.

Exprimer P en fonction n sans signe $\sum$ ni points de suspension.

Quelle est la partie imaginaire de P ?

B.Géométrie : Produit scalaire et produit vectoriel

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-1;0;0)$, $B(1;2;-2)$ et $C(0;2;1)$. On appelle I le milieu de $[AC]$ et Δ la droite qui passe par I en étant orthogonale au plan (ABC).

1. Existe-t-il sur Δ des points M tels que $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$? Si oui, pour chaque solution, donner les coordonnées de M.
2. On pose $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$.

- Calculer $f(C)$.
- On appelle S l'ensemble des points M tels que $f(M) = f(C)$… c'est donc la surface de niveau qui passe par C. Après en avoir cherché une équation cartésienne, préciser la nature de S.

C.Dérivées

C-I. Applications de la définition

On suppose que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction définie, continue et dérivable en tout x de $\mathbb{R}$.

1. Rappeler la définition du nombre dérivé de f en x_0.
2. Démontrer, en utilisant la définition, que si $f(x)=x^2$ alors $f'(x)=2x$.
3. On pose maintenant $f(x)=(1-2x)^n$. Quelle limite correspond à la définition de $f'(0)$? En calculant d'abord la fonction dérivée de f, trouver la valeur de la limite précédente.
4. Comment peut-on interpréter la limite : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}$ en utilisant la dérivée d'une fonction usuelle ? En déduire la valeur de cette limite.

C-II. Calcul des dérivées

Pour chacune des fonctions suivantes où la variable est x, calculer $f'(x)$:

1. $f(x)=\sin(\sqrt{1+x^2})$	2. $g(x)=e^{\sqrt{1+x^2}}$	3. $h(x)=xe^{\sqrt{1+x^2}}$

D.Différentielles

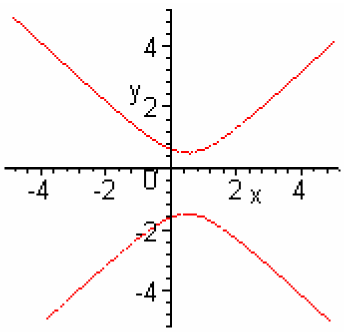
D-I. Calcul des différentielles

Pour chacune des expressions suivantes, calculer la différentielle

1. $P=\sin(\ln(1+x^2))$	2. $Q=\dfrac{1+x}{e^{2x}}$	3. $R=x.\ln(x+y)$

D-II. Sur une courbe

La courbe C a pour équation $y^2+y=x^2-x+1$ et sa représentation est donnée ci-contre :



Un point M glisse sur la branche de C où les ordonnées sont positives. En passant à l'abscisse 1, la vitesse de son projeté sur l'axe des abscisses est 1 [unité de longueur par unité de temps]. Quelle est alors la vitesse de son projeté sur l 'axe des ordonnées ?

D-III. Estimations

a) On donne $f(x)=(1+2x)^3+(1-2x)^3$.

A l'aide d'une calculette, donner une valeur approchée à 0,001 près de la variation vraie de f lorsque x varie de 0 à 0,01.

Sans calculette, donner la valeur exacte de la variation estimée de f lorsque x varie de 0 à 0,01.

b) On donne $f(5)=-6$ et $f'(5)=-\dfrac{1}{2}$. En supposant que cette fonction est définie, continue, dérivable, estimer $f(4{,}98)$.

Barème approximatif

A1	AII	AIII	AIV	B	CI	CII	DI	DII	DIII	Total
1,5	2	2	2	3,5	2,5	1,5	1,5	1,5	2	20