

A. Trigonométrie réciproque

1) On se propose de résoudre l'équation $\text{Arctan}(1+x) = 1 + \text{Arctan}(x)$ où $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que, si x est solution de l'équation, x doit vérifier $x^2 \cdot \tan(1) + x \cdot \tan(1) + \tan(1) - 1 = 0$.
Résoudre alors l'équation.

2) On s'intéresse aux deux équations :
$$\begin{cases} \text{(E1)} & -\text{Arctan}(1+x) = \text{Arctan}(5) + \text{Arctan}(6) \\ \text{(E2)} & \pi - \text{Arctan}(1+x) = \text{Arctan}(5) + \text{Arctan}(6) \end{cases}$$

Montrer que l'une de ces deux équations a des solutions mais pas l'autre... et pour celle qui a des solutions, préciser lesquelles.

B. Volume, vitesse, débit... et bol parabolique.

Un bol parabolique est obtenu en faisant tourner une parabole autour de son axe.

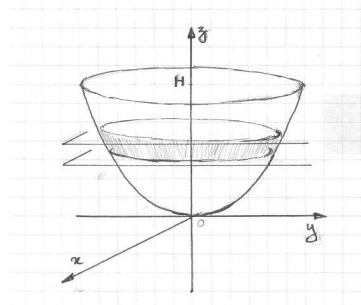
La surface obtenue est ici une partie de la représentation graphique de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x; y) = k \cdot (x^2 + y^2)$ où k est une constante réelle positive dont la dimension physique est $[L]^{-1}$ l'unité de longueur étant le mètre.

En particulier, lorsqu'on coupe cette surface par le plan d'équation $x = 0$, on obtient une courbe d'équation $z = ky^2$ où $z \in [0; H]$, H désignant la hauteur totale du bol en mètres.

On partage ce bol en « tranches horizontales » assimilables à des cylindres de hauteur dh .

1. Quel est le volume d'une de ces « tranches » en fonction de h , k et dh ? En déduire le volume total du bol en fonction de H et de k .
2. A quelle hauteur h , en fonction de H et de k , le bol est-il à moitié plein ?
3. On suppose que $k = \frac{1}{2}$ (unités SI) et que, à l'instant $t = 0$ le bol est vide. On le remplit d'eau

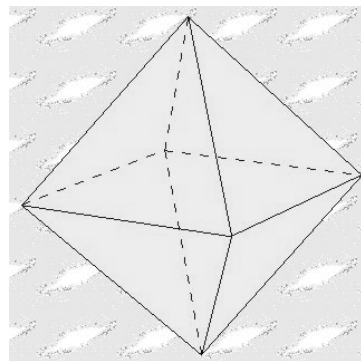
avec un débit constant de $1 \text{ dm}^3/\text{min}$. Lorsque le bol est à moitié plein, à quelle vitesse monte le niveau de l'eau en fonction de H ?



C. Angle solide ... et solide de Platon

Un octaèdre régulier est, comme son nom l'indique, un solide dont les huit faces sont toutes des triangles équilatéraux... et dont on admet ici que les trois plans diagonaux sont des carrés. Les octaèdres réguliers font partie des « solides de Platon » c'est à dire des cinq solides possibles dont toutes les faces ont la même forme et la même taille.

Un observateur se place au centre de cet octaèdre et observe une face : sous quel angle solide voit-il cette face ?



D. Outils vectoriels

Distance dans l'espace muni d'un repère orthonormé

On donne $A(-1; 2; 0)$ $B(1; 3; -1)$ $C(1; -4; 3)$.

1. Quelle est l'aire du parallélogramme dont trois sommets sont A, B et C ?
2. Quel est le volume du parallélépipède dont trois arêtes issues de l'origine sont OA, OB, OC ?
3. Quelle est la distance de l'origine au plan ABC ?
4. Quelle est la distance de l'origine à la droite (AB) ?

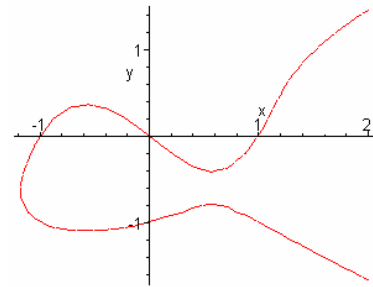
On ne demande pas de re-démontrer les méthodes vues en cours ou en TD : on peut les appliquer directement.

E. Fonctions implicites

Les deux variables x et y sont liées par la relation

$x^3 - y^4 = x + y$ représentée ci-contre.

1. Quelles sont les valeurs possibles de $\frac{dy}{dx}$ lorsque $x = 0$?
2. Quelles sont les valeurs possibles de $\frac{d^2y}{dx^2}$ si $x = 0$?



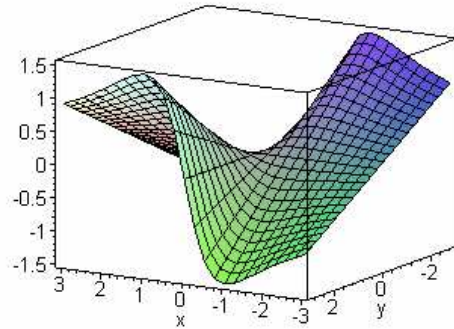
F. Courbes de niveau et gradient

La surface S représente la fonction de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}

telle que $f(x; y) = \frac{xy}{1+x^2}$ (dessin ci-contre)

On appelle M le point de S dont l'abscisse est 1 et l'ordonnée est 1, et m désigne le projeté orthogonal de M sur le plan xOy .

1. Donner un vecteur unitaire orthogonal au plan tangent à S en M .
2. Quel est le niveau de m pour f ? Quel est le gradient de f au point m ?
3. On appelle C la courbe formée des points $K(x; y)$ du plan xOy dont le niveau pour f est x . Montrer que cette courbe est la réunion d'une droite et d'une parabole (dont on donnera une équation) et faire une représentation graphique de C à main levée.



G. Techniques élémentaires d'intégration

G-I. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{4x^3 - 2x + 1}{x - 2} dx$$

$$I_2 = \int x \cdot \sin^2(x) dx$$

G-II. Calcul d'une moyenne

Quelle est la moyenne de tous les réels de la forme $x^2 - 2x$ lorsque $x \in [1; 3]$?

Barème approximatif

A	B	C	D	E	F	G	Total
3,5	3,5	1	3,5	3	3	3	20,5