Logarithmes et Exponentielles

A. Logarithme Néperien

de NEPER (ou NAPIER) John, écossais,1550-1617

Neper est surtout connu pour son invention des logarithmes (le terme est de lui, du grec logos = logique, raison et arithmos = nombre) qu'il explique dans deux traités : *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (1614), *puis Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* (posthume, 1619) soit : Description (resp. Construction) de la Règle Admirable des Logarithmes. L'objectif était de simplifier les calculs trigonométriques de l'astronomie…

A-I. Définition

La fonction $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}$ est continue dans l'intervalle $]0;+\infty[$ donc elle admet des primitives dans cet intervalle et parmi ces primitives, on appelle logarithme Népérien celle qui s'annule pour $x=1$.

En résumé, par définition on a trois informations capitales :

1)	$\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$;
2)	$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$
3)	$\ln(1) = 0$

A-II. Propriété fondamentale

Si a et b sont deux réels non-nuls, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

Démonstration : Soit g la fonction définie dans $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \ln(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors $g'(x) = a.\ln'(ax) = \dfrac{a}{ax} = \dfrac{1}{x}$ ce qui montre que g est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ au même titre que $\ln$ et que par conséquent, la différence entre $g(x)$ et $\ln(x)$ est une constante : $g(x) = \ln(x) + k$.

En particulier, pour $x=1$ on a $g(1) = \ln(1) + k$ c'est à dire $g(1) = k$. Comme on avait posé $g(x) = \ln(ax)$ on a aussi $g(1) = \ln(a)$ soit finalement $k = \ln(a)$.

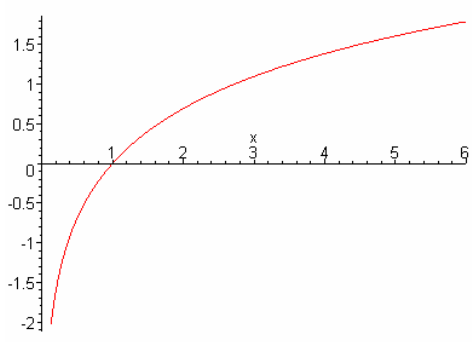
On revient alors à $g(x) = \ln(x) + k$ et on remplace… $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$ et on change de nom de variable en remplaçant x par b : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Conséquences : On démontre à partir de cette propriété que… si $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{Z}$

$\ln(\dfrac{1}{a}) = -\ln(a)$	$\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$	$\ln(a^n) = n.\ln(a)$	$\ln(\dfrac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$

A-III. *Etude de la fonction* $\ln()$

On a déjà, par définition : $D_{\ln} =]0;+\infty[$, dérivable dans $]0;+\infty[$ avec $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ … donc dérivée positive dans $]0;+\infty[$, fonction croissante strictement. On démontre que $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et que $\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \ln(x) = +\infty$ ce qui permet de construire le tableau des variations et la représentation graphique.



Propriétés supplémentaires :

1. La fonction $\ln()$ étant continue et strictement croissante de $]0;+\infty[$ vers $]-\infty;+\infty[$ elle réalise une bijection entre ces intervalles, et 1 (qui est dans l'ensemble d'arrivée) possède un antécédent unique : on appelle e cet antécédent et on démontre que $e = 2,71828...$
2. On démontre aussi que $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ et que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Ces limites se retiennent facilement sous la forme « dans les formes indéterminées, l'effet de $\ln(x)$ est toujours dominé par celui de $x, x^2, x^3...$ ». on dit que $\ln()$ est une « fonction à croissance faible ».

B. Exponentielle de base e

B-I. *Définition*

Puisque la fonction $\ln()$ est une bijection de $]0;+\infty[$ vers $]-\infty;+\infty[$, elle possède une réciproque (de $]-\infty;+\infty[$ vers $]0;+\infty[$) qui est aussi une bijection. On note $\exp()$ cette réciproque et on l'appelle exponentielle de base e.

Propriétés immédiates :

1. On a $\ln(1) = 0$ donc réciproquement $\exp(0) = 1$
2. On a $\ln(e) = 1$ donc réciproquement $\exp(1) = e$
3. $\exp()$ est définie dans $\mathbb{R}$ et ne donne que des résultats strictement positifs.

B-II. *Propriété fondamentale*

Pour tous a et b dans $\mathbb{R}$, on a $\exp(a+b) = \exp(a).\exp(b)$

Démonstration (simple et instructive) :

La définition de $\exp()$ comme réciproque de $\ln()$ donne immédiatement $\ln(\exp(a+b)) = a+b$.

La propriété fondamentale de $\ln()$ donne $\ln(\exp(a).\exp(b)) = \ln(\exp(a)) + \ln(\exp(b)) = a+b$

Enfin, comme $\ln()$ est une bijection, de $\ln(\exp(a+b)) = \ln(\exp(a).\exp(b))$ on peut déduire $\exp(a+b) = \exp(a).\exp(b)$.

Conséquences : En appliquant le même schéma de démonstration (l'égalité de deux images pour une bijection donne l'égalité des antécédents) on obtient :

$\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$	$\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$	$\exp(na) = \exp(a)^n$

Remarque : Si le nombre e^x était défini (ce qui n'est pas le cas car jusqu'à maintenant les seuls exposants possibles étaient des rationnels) on s'attendrait, en utilisant les propriétés des logarithmes, à avoir $\ln(e^x) = x$ or on a déjà $\ln(\exp(x)) = x$ … Il semble donc judicieux de décider que e^x n'est qu'une façon commode de désigner $\exp(x)$.

Notation : On décide de noter $\exp(x)$ sous la forme e^x. Du coup, les propriétés algébriques de l'exponentielle s'écrivent de façon simple à retenir car elles ressemblent aux propriétés des puissances.

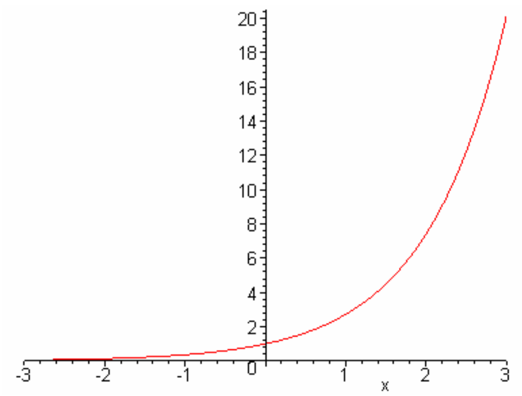
$e^0 = 1$	$e^1 = e$	$e^{x+y} = e^x.e^y$	$e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$	$e^{nx} = \left(e^x\right)^n$

B-III. Etude la fonction $\exp()$

On a $\ln(\exp(x)) = x$ donc en dérivant : $\exp'(x).\dfrac{1}{\exp(x)} = 1$ c'est à dire $\exp'(x) = \exp(x)$.

La fonction exponentielle est dérivable dans $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée. Comme l'ensemble d'arrivée est $]0;+\infty[$, la dérivée est strictement positive et la fonction est strictement croissante.

On démontre alors que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ce qui permet de dresser le tableau des variations et de tracer la représentation graphique.



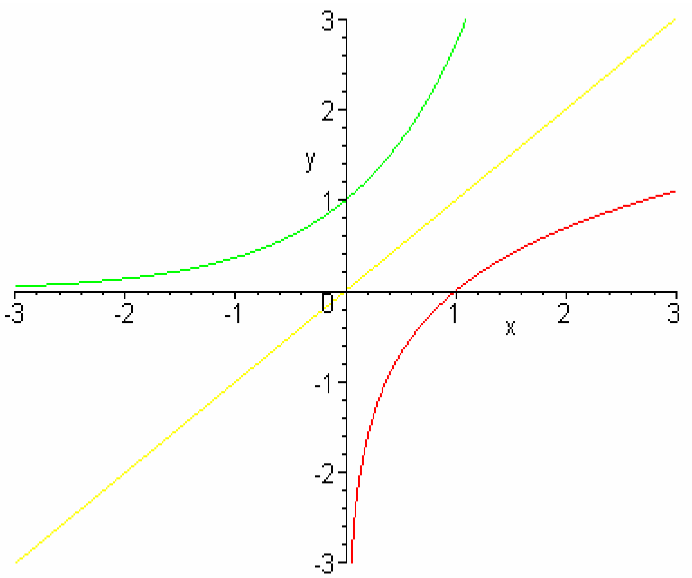
Propriétés supplémentaires :

On démontre que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. Ces limites se retiennent facilement sous la forme « dans les formes indéterminées, l'effet de x, x^2, x^3... est toujours dominé par celui de e^x ». on dit que e^x est une « fonction à croissance forte ».

C. Compléments

C-I. Représentations simultanées de $\ln()$ et de $\exp()$

Dire que $\ln(x) = y$ revient à dire que $e^y = x$ autrement dit, si $(x;y)$ est un point de la représentation graphique de l'une, alors $(y;x)$ est un point de la représentation graphique de l'autre. Dans un repère orthonormé, les deux représentations graphiques sont symétriques par rapport à la diagonale du repère.



C-II. Fonctions logarithmes de base quelconques

On appelle logarithme de base b, où b est un réel strictement positif et différent de 1 et on note $\log_b()$ la fonction telle que :

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

Par définition, $\log_b(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(b)} = 1$.

Lorsque $0 < b < 1$ on a $\ln(b) < 0$ et $\log_b()$ est une fonction décroissante, mais lorsque $1 < b$ on a $\ln(b) > 0$ et $\log_b()$ est une fonction croissante

Les propriétés algébriques des fonctions logarithmes de base b sont les mêmes que pour la fonction logarithme Néperien qui peut aussi s'appeler fonction logarithme de base e.

La fonction logarithme de base 10 est très employée dans les domaines technologiques… tellement qu'on la note souvent $\log()$ sans préciser quelle est la base employée. Elle a la propriété remarquable $\log(10^n) = n$.

C-III. Fonctions exponentielles de base quelconque

On appelle exponentielle de base b et on note $\exp_b()$ la fonction réciproque de $\ln_b()$…pourvu que b soit un réel strictement positif et différent de 1.

Dans tous les cas, $\exp_b(1) = b$ et en particulier l'exponentielle « usuelle » est l'exponentielle de base e.

Si $0 < b < 1$ alors $\exp_b()$ est décroissante, et si $1 < b$ alors $\exp_b()$ est croissante

Les propriétés algébriques des fonctions exponentielles de base b sont les mêmes que pour la fonction exponentielle usuelle (de base e) qui peut aussi s'appeler fonction logarithme de base e.

Un raisonnement du même type qu'au BII montre que si on veut donner un sens à l'écriture b^x, il est tout indiqué de poser $\exp_b(x) = e^x$. ***Cette écriture généralise donc celle des puissances… mais elle n'est utilisable que pour une base positive et différente de 1***.

Valeurs usuelles	
$\ln(1) = 0$	$e^0 = 1$
$\ln(e) = 1$	$e^1 = e$
$\ln(20) \cong 3$	$e^3 \cong 20$
$e \cong 2,71828...$	