

# Primitives et Intégrales

*Le problème de l'intégration est l'un des plus importants des mathématiques, donner un sens à la notion d'intégrale, préciser quelles sont les fonctions intégrables et celles qui ne le sont pas a pris plusieurs siècles. La théorie la plus employée aujourd'hui en physique est celle initiée par Mercator, développée par Riemann (découpage en « tranches » verticales...) et depuis, complétée par Stieltjes [STIELTJES Thomas Jan, hollandais, 1856-1894]. Une autre théorie de l'intégration plus efficace a été développée en France à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle par Henri Lebesgue [LEBESGUE Henri Léon, français, 1875-1941]...*

*Une façon très simplificatrice d'éviter ces théorie consiste à ne s'intéresser qu'à des fonctions continues sur un intervalle et à utiliser la notion de primitive : c'est ce qui est fait en terminale et c'est sur cette base que nous démarrerons.*

## A. Définition, propriété fondamentale

**Définition :** On appelle primitive d'une fonction  $f$  définie dans un intervalle  $I$  toute fonction  $F$  dérivable dans  $I$  et telle que  $F' = f$ .

**Remarque :** Si  $F$  est une primitive de  $f$ , toute fonction  $G$  définie dans  $I$  par  $G(x) = F(x) + k$  est aussi une primitive de  $f$ . Cela signifie qu'une fonction  $f$  qui possède une primitive dans  $I$  en possède une infinité.

**Propriété :** Si  $F$  et  $G$  sont des primitives de  $f$  définies dans le même intervalle  $I$  alors il existe une constante réelle  $k$  telle que  $G(x) = F(x) + k$

**Remarque :** Si  $F$  est une primitive de  $f$  définie dans un intervalle  $I$ , alors quel que soit le couple de réels  $(x_0; y_0)$  où  $x_0 \in I$ , il existe une primitive  $G$  telle que  $G(x_0) = y_0$ . En effet si  $F(x_0) = A$ , on pose  $k = y_0 - A$  et  $G(x) = F(x) + k$  ... ce qui donne  $G(x_0) = F(x_0) + k = A + y_0 - A$ .

**Notation :** Si  $f$  est une fonction de la variable  $x$ , on note parfois  $\text{Primit}(f)$  ou plus couramment  $\int f(x).dx$  une primitive quelconque de  $f$ .

## B. Recherche des primitives

*Rien ne nous permet de distinguer les fonctions qui ont une primitive des autres... mais pourtant il semble raisonnable de penser que les fonctions « assez régulières » ne doivent pas trop poser de problème.*

**On admet que toute fonction continue dans un intervalle  $I$  possède une primitive définie sur cet intervalle.**

*Attention, ce n'est pas parce qu'on est sûr qu'une fonction possède une primitive que celle-ci est facile à trouver ! Il reste donc à fabriquer des méthodes de recherche de primitives.*

### B-I. Primitives des fonctions élémentaires

En se méfiant des ensembles de définition, on peut utiliser les dérivées connues « à l'envers ».

Si $f(x) =$	0	$k$	$x$	$x^n$ ( $n \neq -1$ )	$\frac{1}{x}$ ( $= x^{-1}$ )
Alors $F(x) =$	$k$	$kx + Cste$	$\frac{1}{2}x^2 + Cste$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + Cste$	$\ln(x) + Cste$

Si $f(x) =$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$e^x$
Alors $F(x) =$	$-\cos(x) + Cste$	$\sin(x) + Cste$	$e^x + Cste$

### B-II. Primitives des fonctions constituées de fonctions élémentaires

- ◆  $u$  étant une fonction de primitive  $U$  dans l'intervalle  $I$ ,  
si  $f = ku$  alors, dans  $I$  on a :  $F = kU + Cste$
- ◆  $u$  et  $v$  étant deux fonctions de primitives  $U$  et  $V$  dans l'intervalle  $I$ ,  
si  $f = u + v$  alors, dans  $I$  on a :  $F = U + V + Cste$
- ◆  $u$  étant une fonction de dérivée  $u'$  dans l'intervalle  $I$ ,  
si  $f = u'u^n$  (avec  $n > 0$ ) alors, dans  $I$  on a :  $F = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + Cste$
- ◆  $u$  étant une fonction de dérivée  $u'$  et ne s'annulant pas dans l'intervalle  $I$ ,  
si  $f = u'u^n$  (avec  $n < -1$ ) alors, dans  $I$  on a :  $F = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + Cste$
- ◆  $u$  étant une fonction de dérivée  $u'$  et gardant un signe constant dans l'intervalle  $I$ ,  
si  $f = u'u^{-1}$  (cas  $n = -1$ ) alors, dans  $I$  on a :  $F = \ln(|u|) + Cste$
- ◆ Si  $f$  est une fonction continue qui peut s'écrire  $u' \times v \circ u$  dans un intervalle  $I$ , alors sur cet intervalle  $I$  une primitive de  $f$  est  $F$  telle que  $F(x) = v \circ u + Cste$ .
  - Application1 : Dans tout intervalle  $I$  une primitive de  $f$  telle que  $f(x) = \sin(ax+b)$  est  $F$  telle que  $F(x) = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + Cste$ .
  - Application2 : Dans tout intervalle  $I$  une primitive de  $f$  telle que  $f(x) = \cos(ax+b)$  est  $F$  telle que  $F(x) = \frac{\sin(ax+b)}{a} + Cste$ .
  - Application3 : Dans tout intervalle  $I$  une primitive de  $f$  telle que  $f(x) = e^{ax+b}$  est  $F$  telle que  $F(x) = \frac{e^{ax+b}}{a} + Cste$ .

### B-III. Intégration par parties

Alors qu'il y a une formule de dérivation pour un produit il n'y a pas de formule donnant une primitive d'un produit. Pourtant, une bonne compréhension de la formule de dérivation d'un produit permet, lorsqu'on cherche une primitive d'un produit de remplacer cette recherche par une autre... parfois plus simple.

On a  $(uv)' = u'v + v'u$  donc  $u'v = (uv)' - v'u$  et en utilisant des primitives,  $\text{Primit}(u'v) = \text{Primit}(uv)' - \text{Primit}(v'u)$  c'est à dire  $\text{Primit}(u'v) = uv - \text{Primit}(v'u)$  ce qui s'écrit plus souvent sous la forme  $\int u'(x).v(x).dx = u(x).v(x) - \int v'(x).u(x).dx$ .

Cette formule ne « donne pas de réponse » mais indique comment remplacer la recherche d'une primitive par une autre. Elle s'applique tout particulièrement aux recherches de primitives des fonctions la forme  $x^n.e^x$ ;  $x^n.\sin(x)$ ;  $x^n.\cos(x)$ ;  $x.\ln(x)$ ...

## C. Intégrales définies

### C-I. Définition calculatoire

Si  $f$  est une fonction de primitive  $F$  dans un intervalle  $[a;b]$  on pose :

$$\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)$$

**C-II. Interprétation : aire algébrique et aire géométrique**

Lorsque  $f$  est une fonction à valeurs positives avec  $a < b$ ,  $\int_a^b f(x).dx$  correspond à l'aire géométrique de la surface formée des points  $M(x; y)$  tels que  $\begin{cases} a < x < b \\ 0 < y < f(x) \end{cases}$ . Ce résultat sera revu dans les cours du 1<sup>er</sup> semestre.

Lorsque  $f$  est une fonction à valeurs négatives (ou bien lorsque  $a > b$ ),  $\int_a^b f(x).dx$  ne correspond pas à l'aire d'une surface... puisque le résultat de l'intégrale est négatif.

Lorsque  $f$  garde un signe constant dans  $[a; b]$  on appelle « aire algébrique » de la surface  $S$  délimitée par les droites  $x = a; x = b; y = 0$  et la courbe  $y = f(x)$  le nombre  $\int_a^b f(x).dx$ .

On peut remarquer que le contour de  $S$  est une courbe simple (sans point double) et que l'aire algébrique a le signe du sens de parcours de ce contour orienté par le trajet de  $a$  à  $b$  sur l'axe des abscisses.

Si une fonction  $f$  ne garde pas un signe constant dans  $[a; b]$ , pour calculer l'aire géométrique de la surface  $S$  délimitée par les droites  $x = a; x = b; y = 0$  et la courbe  $y = f(x)$ , on partage  $[a; b]$  en sous intervalles où  $f$  garde un signe constant, on calcule l'aire algébrique correspondant à chacun de ces sous-intervalles, on en déduit l'aire géométrique (changement de signe pour les aires algébriques négatives) et on additionne... cela revient à calculer  $\int_a^b |f(x)|.dx$ .

**C-III. Propriétés des intégrales définies**

1. Si  $a, b, c$  sont dans un intervalle où  $f$  possède une primitive, on a :

$$\int_a^c f(x).dx = \int_a^b f(x).dx + \int_b^c f(x).dx$$

Conséquence immédiate :  $\int_a^b f(x).dx = -\int_b^a f(x).dx$

2. Si  $a$  et  $b$  sont dans un intervalle où  $f$  et  $g$  possèdent des primitives, on a :

$$\int_a^b (f(x) + g(x)).dx = \int_a^b f(x).dx + \int_a^b g(x).dx$$

3. Si  $a$  et  $b$  sont dans un intervalle où  $f$  possède une primitive, on a :

$$\int_a^b k.f(x).dx = k.\int_a^b f(x).dx$$

4. Si  $a$  et  $b$  sont dans un intervalle où  $f$  et  $g$  possèdent des primitives, on a :

dès que  $f \leq g$  pour tout  $x \in [a; b]$  (avec  $a < b$ ),  $\int_a^b f(x).dx \leq \int_a^b g(x).dx$

5. Si  $a$  et  $b$  sont dans un intervalle où  $f$  possède une primitive, on a :

$$\left| \int_a^b f(x).dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|.dx$$

6. Si  $a$  et  $x$  sont dans un intervalle  $I$  où  $f$  possède une primitive, en posant  $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$  on obtient une fonction  $\varphi$  continue dans  $I$  et dont la dérivée est  $f$ .

7. Si  $-a$  et  $a$  sont dans un intervalle où  $f$  est paire et possède une primitive, on a :

$$\int_{-a}^{+a} f(x).dx = 2.\int_0^a f(x).dx$$

8. Si  $-a$  et  $a$  sont dans un intervalle où  $f$  est impaire et possède une primitive, on a :

$$\int_{-a}^{+a} f(x).dx = 0$$

9. Si  $a$  et  $a+T$  sont dans un intervalle où  $f$  possède une primitive et si  $f$  a pour période  $T$ , on a :

$$\int_a^{a+T} f(x).dx = \int_0^T f(x).dx$$

## D. Applications des intégrales définies

### D-I. Valeur moyenne, valeur efficace

Si  $f$  est une fonction intégrable dans  $[a;b]$  on appelle valeur moyenne de  $f$  dans  $[a;b]$  le nombre  $m$  tel que

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x).dx.$$

Cette idée n'a rien de mystérieux : on cherche une constante qui puisse remplacer  $f(x)$  dans l'intégrale sans changer la somme.

Les applications sont très nombreuses en physique où de nombreuses quantités sont représentées par des fonctions périodiques (ondes sonores, courants électriques alternatifs, oscillations d'un ressort...). Pour ces quantités on définit la **valeur efficace**  $v$  comme la racine de la valeur moyenne du carré de la fonction sur un intervalle de longueur une période, c'est à dire :

$$v = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x).dx.}$$

### D-II. Fonctions définies par une intégrale

Certaines grandeurs physiques sont par nature des résultats d'intégrales. Par exemple, le volume de liquide contenu dans un récipient recevant un débit variable, la quantité d'électricité contenue dans une batterie d'automobile connectée à un chargeur de batterie, la quantité de chaleur contenue dans un corps soumis à un chauffage ou à un refroidissement...

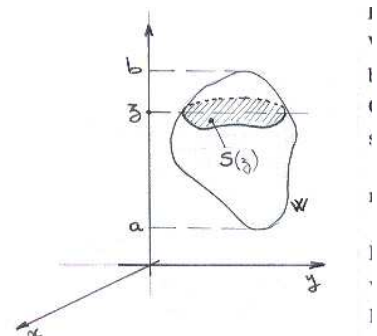
### D-III. Calcul de volumes

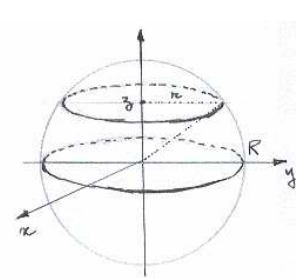
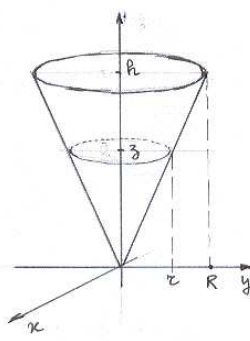
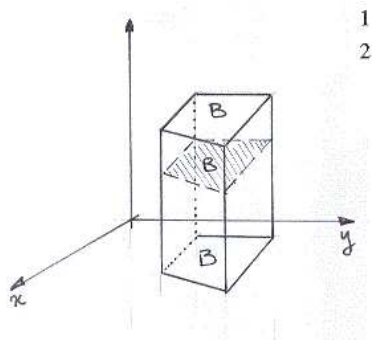
L'espace étant muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ,  $W$  désigne un « solide » clos dont la hauteur varie de  $a$  à  $b$ . Le programme de terminale affirme alors que si  $S(z)$  désigne l'aire de la surface découpée dans  $W$  par le plan de cote  $z$ , le volume de  $W$  est le nombre  $V$  tel que :

$$V = \int_a^b S(z).dz.$$

Conséquences :

- ◆ Tout prisme droit de base  $B$  et de hauteur  $h$  a pour volume  $B.h$
- ◆ Toute pyramide de base  $B$  et de hauteur  $h$  a pour volume  $\frac{B.h}{3}$
- ◆ Tout cône de base  $B$  et de hauteur  $h$  a pour volume  $\frac{B.h}{3}$
- ◆ Toute boule de rayon  $R$  a pour volume  $\frac{4}{3}\pi.R^3$





## E. Généralisation de l'intégrale définie : intégrale généralisée

### E-I. Première espèce

On définit le symbole  $\int_a^{+\infty} f(x).dx$  comme  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x).dx$  si cette limite existe.

On définit de même le symbole  $\int_{-\infty}^b f(x).dx$  comme  $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x).dx$  si cette limite existe.

On définit enfin le symbole  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx$  comme  $\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x).dx$  à condition qu'on puisse trouver

un réel  $c$  tel que séparément  $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x).dx$  et  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x).dx$  existent.

### E-II. Deuxième espèce

Si  $f(x)$  est définie dans  $]a;b]$  et tend vers  $+\infty$  lorsque  $x \rightarrow a$ , on définit le symbole  $\int_a^b f(x).dx$  comme  $\lim_{c \rightarrow a} \int_c^b f(x).dx$  si cette limite existe.

Les trois autres cas sont faciles à énoncer si on a compris jusque là...

*Il est intéressant d'avoir quelques notions historiques sur ce sujet... le site <http://www.chronomath.com/> est une vraie merveille et on peut y passer des heures passionnantes (mais oui, mais oui... !)*