Nombre dérivé, fonction dérivée.

A. Rappels sur limite et continuité

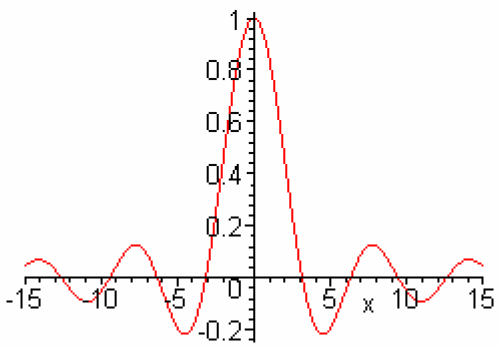
A-I. Définition

Dire que f est une fonction continue en x_0 c'est dire que f est définie en x_0 et que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

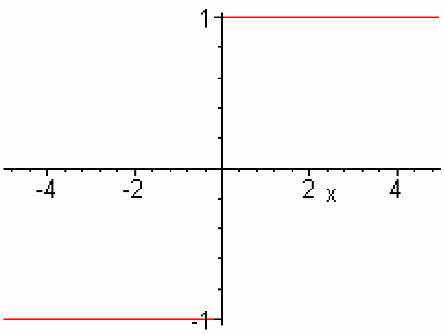
Si une fonction n'est pas définie en x_0 elle ne peut pas être continue en x_0 mais on peut avoir $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et il est alors tentant de donner à $f(x_0)$ - qui n'est pas défini - la valeur l. Evidemment la fonction n'est plus la même (donc il faut donner un nouveau nom à la nouvelle fonction) puisqu'on change son ensemble de définition. On dit qu'on **prolonge la fonction par continuité**.

Exemple 1 : Soit $f(x) = \dfrac{x}{x}$. Il est clair que $f(x)$ vaut presque toujours 1 sauf si $x = 0$ car aujourd'hui comme hier on ne peut pas diviser par 0 (et demain ce sera pareil). Si on imagine la représentation graphique, on a une droite… sauf un point : on est tenté de « boucher le trou » en ajoutant le point qui manque, c'est à dire de poser $f(0) = 1$. En fait on définit une nouvelle fonction, disons $\overline{f}$ telle que : $\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ et cette nouvelle fonction est définie pour tout réel en donnant toujours l'image 1.

Exemple 2 : Soit $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. A nouveau cette fonction n'est pas définie si $x = 0$ … et la représentation graphique fait apparaître une courbe presque continue : il ne manque que le point d'abscisse 0. Comme $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ on est tenté de poser $f(0) = 1$… On définit une nouvelle fonction, disons $\overline{f}$ telle que : $\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ et cette nouvelle fonction est définie pour tout réel.



Remarque : On ne peut pas prolonger par continuité n'importe quelle fonction ! Par exemple, si $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, la fonction n'est pas définie en 0 mais il ne suffit pas de rajouter un point à la représentation graphique pour en faire une courbe continue. On ne peut prolonger par continuité en x_0 que si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$ et dans ce dernier exemple on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$



B. Définitions fondamentales

B-I. Nombre dérivé et fonction dérivée

Soit f une fonction continue en x_0 et définie dans un intervalle ouvert contenant x_0. Si le nombre $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ possède une limite finie lorsque $h \to 0$ alors on appelle cette limite **nombre dérivé** de f en x_0.

$$\boxed{\text{Nombre dérivé de } f \text{ en } x_0 = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

Vocabulaire :

1. Si f possède un nombre dérivé en x_0, alors on dit que f est dérivable en x_0,
2. Si f est dérivable en toute valeur d'un intervalle I, on dit que f est dérivable dans I.
3. Le procédé qui, à tout x d'un intervalle I associe le nombre dérivé de f en x (s'il existe) est une fonction appelée **fonction dérivée** de f et notée f'. Le nombre dérivé de f en x est donc « naturellement » noté $f'(x)$.

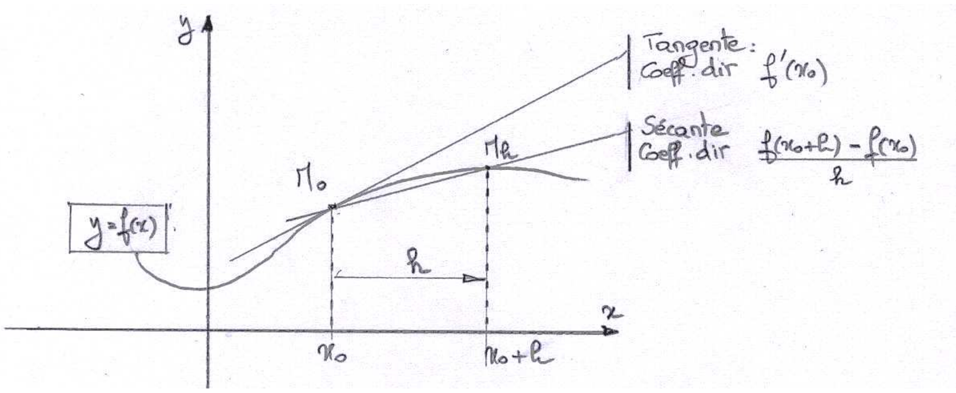
Attention à l'enchaînement des idées… une fonction dérivable en x_0 est forcément continue en x_0 mais la réciproque est fausse (une fonction continue en x_0 peut très bien ne pas être dérivable en x_0) de même une fonction continue en x_0 est forcément définie en x_0 mais la réciproque est fausse (une fonction définie en x_0 peut très bien ne pas être continue en x_0).

B-II. Quelques exemples typiques et instructifs

- Si $f(x)=|x|$, on a une fonction définie en 0 et continue en 0 mais pas dérivable en 0 puisque $f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ mais par contre $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=-1$ alors que $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=1$ donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ n'existe pas.
- Si $f(x)=\sqrt{x}$, on a une fonction définie en 0 et continue en 0 mais pas dérivable en 0 puisque $f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ mais par contre $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=+\infty$ ce qui est interdit pour une dérivée.
- Si $f(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x \text{ est décimal}\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$, on a une fonction définie en 0 mais ni continue ni dérivable en 0… Essayez donc d'imaginer la représentation graphique de cette fonction.
- Si $f(x)=\begin{cases}x \text{ si } x \text{ est décimal}\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$, on a une fonction définie et continue en 0 mais pas dérivable en 0… Essayez toujours d'imaginer la représentation graphique de cette fonction.
- Si $f(x)=\begin{cases}x^2 \text{ si } x \text{ est décimal}\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$, on a une fonction définie, continue et dérivable en 0. Essayez encore d'imaginer la représentation graphique de cette fonction.

B-III. Interprétation géométrique de la dérivée

Soit f une fonction « pas trop catastrophique » de représentation graphique C_f. On note M_0 le point de C_f d'abscisse x_0 et M_h le point de C_f d'abscisse $x_0 + h$. La droite Δ_h passe par M_0 et M_h. On fait tendre h vers 0…



- Le nombre $x_0 + h$ tend vers x_0
- Le point M_h glisse sur C_f en s'approchant de M_0
- La droite Δ_h pivote autour de M_0 en s'approchant d'une position particulière qu'on appellera tangente à C_f en à C_f en M_0.
- Le coefficient directeur de Δ_h qui est $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ tend vers $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

$\Rightarrow$ On en conclut que le coefficient directeur de la tangente à C_f en M_0 est le nombre dérivé de f en x_0.

C. Applications physiques de la dérivée

C-I. Vitesse (dérivée d'une distance par rapport au temps)

La vitesse instantanée à l'instant t_0 d'un mobile qui parcourt en le temps t la distance $D(t)$ est le nombre dérivé $D'(t_0)$ avec $D'(t_0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{D(t_0+h)-D(t_0)}{h}$

C-II. Débit (dérivée d'une quantité par rapport au temps)

Le débit instantané à l'instant t_0 d'une grandeur physique dont la quantité $Q(t)$ est une fonction du temps t est le nombre dérivé de cette quantité… $Q'(t_0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{Q(t_0+h)-Q(t_0)}{h}$.

- Par exemple, l'intensité instantanée du courant électrique sortant d'un condensateur lors de sa décharge au travers d'une résistance est la dérivée en fonction de la quantité d'électricité qu'il contient en fonction du temps.
- Autre exemple, le débit de chaleur d'un corps « chaud » placé dans un milieu « moins chaud » est la dérivée de la quantité de chaleur qu'il contient en fonction du temps.
- L'eau d'une bassine placée au soleil s'évapore : on peut définir le débit d'évaporation comme la dérivée de la quantité d'eau contenue dans la bassine en fonction du temps.

C-III. Gradient (dérivée d'une quantité par rapport à la position)

Certaines grandeurs physiques sont définies comme un nombre dépendant de la position d'observation… La dérivée d'une telle grandeur par rapport à la position est appelée un gradient.

- Par exemple, un fil métallique chauffé à une de ses extrémités par une flamme n'a pas la même température en tous ses points : plus on s'éloigne du point de chauffe, plus la température est faible. Si on note $T(x)$ la température en fonction de l'éloignement x du point de chauffe, le gradient de température est la dérivée de la température en fonction de x.
- La pression dans un fluide au repos dépend de la profondeur dans ce fluide. Si on note $P(z)$ la pression dans ce fluide en fonction de la profondeur z, le gradient de pression est la dérivée de la pression en fonction de la profondeur z

C-IV. Autre cas (dérivée d'une quantité par rapport à un angle)

La puissance reçue par une surface soumise à un rayonnement dépend de l'orientation de cette surface par rapport au rayonnement. Si on note α l'angle entre la normale à la surface et le rayonnement et $P(\alpha)$ la puissance en fonction de l'orientation, la dérivée de cette puissance en fonction de α donne une indication sur l'intérêt de soigner l'orientation de la surface… Les utilisateurs de panneaux solaires savent bien cette orientation n'a pas besoin d'être extrêmement précise si le rayonnement est proche de la normale.

C-V. Développements limités à l'ordre 1 (meilleure approximation affine)

Si f est dérivable en x_0, on a $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ c'est à dire $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)+\varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

On en déduit $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h\varepsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ et cette dernière écriture est appelée développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de x_0.

En négligeant le terme $h\varepsilon(h)$, on obtient des valeurs approchées de $f(x_0+h)$ appelées « équivalents de $f(x_0+h)$ au voisinage de x_0 » et on écrit : « $f(x_0+h)\sim f(x_0)+hf'(x_0)$ ».

Par exemple, au voisinage de 0 on a :

$\sin(h)\sim h$	$\cos(h)\sim 1-\frac{1}{2}h^2$ (♥)	$\tan(h)\sim h$
$\ln(1+h)\sim h$	$e^h\sim 1+h$	
$(1+h)^\alpha\sim 1+\alpha h$	$\sqrt{1+h}\sim 1+\frac{1}{2}h$	$\frac{1}{1+h}\sim 1-h$

C-VI. Application au sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction définie dans un intervalle ouvert I.

- Si $f'(x)$ reste strictement positif pour tout x dans I sauf peut-être en un nombre fini de valeurs, alors f est strictement croissante dans I.
- Si $f'(x)$ reste strictement négatif pour tout x dans I sauf peut-être en un nombre fini de valeurs, alors f est strictement décroissante dans I.

(♥) En fait, cet équivalent est déduit d'un développement limité à l'ordre 2… notion qui sera vue à l'IUT

D. Quelques raffinements…

Il arrive que f soit définie dans un intervalle fermé $[a;b]$ et que l'on s'intéresse à sa dérivabilité aux bornes de l'intervalle.

Comme l'intervalle est fermé, on ne peut pas trouver d'intervalle ouvert contenant une borne et contenu dans l'ensemble de définition donc f ne peut pas être dérivable en a ou en b. On définit pour ce cas la notion de « demi-dérivée » ou de « dérivée à gauche » et de « dérivée à droite ».

f étant définie dans l'intervalle $[a;b]$, on dit que :

- f est dérivable à droite de a lorsque $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est fini.
- f est dérivable à gauche de b lorsque $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$ existe et est fini.
- On dira enfin que f est dérivable dans l'intervalle $[a;b]$ lorsqu'elle est dérivable dans $]a;b[$ et dérivable à droite de a et dérivable à gauche de b.

Dans ces conditions, dire que f est dérivable en x_0, c'est dire que f est continue en x_0 et dérivable à gauche et à droite de x_0 et que ces « demi-dérivées » sont égales.

Quelques exemples :

- Si $f(x)=|x|$, on a $f(0)=0$ mais la demi-dérivée à gauche de 0 est –1 alors que la demi-dérivée à droite de 0 est 1 : cette fonction n'est pas dérivable en 0.
- Si $f(x)=\sqrt{x}$, on a $f(0)=0$ mais $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}=+\infty$ (et de plus la fonction n'est pas définie à gauche de 0) : cette fonction n'est pas dérivable en 0.
- Si $f(x)=E(x)$ - la partie entière de x c'est le plus grand des entiers qui sont inférieurs ou égaux à x -, on a $f(0)=0$… mais la fonction n'est pas continue en 0.
- Si $f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ si } x\geq 0 \\ 0 \text{ si } x<0\end{cases}$ on a $f(0)=0$, la fonction est continue en 0, la demi-dérivée à gauche de 0 est 0 et la demi-dérivée à droite de 0 est 0 : cette fonction est dérivable en 0.

E. Formulaires

E-I. Dérivées des fonctions élémentaires

A appliquer en se méfiant des ensembles de définition…

Si $f(x)=$	Constante	x	x^2	…	x^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$
Alors $f'(x)=$	0	1	$2x$	…	$n.x^{n-1}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Si $f(x)=$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	e^x	$\ln(x)$
Alors $f'(x)=$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$1+\tan^2(x)$ ou $\frac{1}{\cos^2(x)}$	e^x	$\frac{1}{x}$

E-II. Dérivées des fonctions constituées de fonctions élémentaires

On suppose que u et v sont deux fonctions de la même variable x, toutes les deux dérivables dans l'intervalle I, de dérivées u' et v'. On démontre que, dans ces conditions, $ku,\ u+v,\ uv,\ u^n$ (avec $n>0$) sont dérivables dans I et de plus, en tout point où v ne s'annule pas alors $\frac{u}{v}$ est dérivable ainsi que v^n $(n<0)$.

Si $f(x)=$	ku	$u+v$	uv	u^n	$\frac{u}{v}$	$u\circ v$
Alors $f'(x)=$	ku'	$u'+v'$	$u'v+v'u$	$n.u'xu^{n-1}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	$v'.u'(v)$

F. Notation différentielle

F-I. Distinction entre variable et fonction, variables liées.

Lorsqu'on écrit $f(x)$ on distingue f qui est une fonction, x qui est le réel de départ et $f(x)$ qui n'est pas une fonction mais le réel image de x pour f. Cette notation est commode pour comprendre la notion de dérivée : écrire $f'(x)$ c'est dériver la fonction f et appliquer la nouvelle fonction obtenue f' à un réel x.

En physique, on nomme rarement les fonctions employées, on se contente d'indiquer comment sont reliées différentes variables. Par exemple, lorsqu'on écrit $y=x^2$ on énonce un lien entre des quantités mais aucune fonction n'est nommée…

F-II. Dérivée et notation différentielle

La question est alors de savoir comment noter la dérivée lorsqu'une quantité est obtenue par une fonction « non nommée ». On voit parfois apparaître des notations telles que $y'=2x$ mais cette façon de faire est très dangereuse car elle confond les idées $f'(x)$ et $\left[f(x)\right]'$ qui sont totalement différentes. C'est pour éviter cette confusion que, lorsque y est lié à x sans que la fonction soit nommée on écrit plutôt $\frac{dy}{dx}$ la dérivée de y considéré comme fonction de x.

On démontre que la notation $\frac{dy}{dx}$ se manie comme une fraction… en particulier, si $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ alors on peut écrire $dy=f'(x).dx$ et dy **est appelé différentielle de** y

Cette notion sera revue et expliquée au cours de mathématiques du premier semestre… mais elle sera très vite employée dans les cours de physique, probablement avant qu'elle soit expliquée.

Exemples :

- On donne la formule $S=\pi.R^2$ … on en déduit $\frac{dS}{dR}=2\pi R$ ou bien $dS=2\pi R.dR$
- On donne la formule $S=\pi.\frac{D^2}{4}$ … on en déduit $\frac{dS}{dD}=\frac{\pi D}{2}$ ou bien $dS=\frac{\pi D}{2}.dD$

G. Quelques exercices de base…

Il serait bon que chacun sache prouver (en appliquant la définition) les formules donnant les dérivées des fonctions élémentaires… et pour cela :

- En appliquant la définition, calculer $f'(x_0)$ dans les cas suivants :

a) $f(x) = x^2$ avec $x_0 = 2$ puis $x_0 = 4$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ avec $x_0 = 1$ puis $x_0 = 4$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ avec $x_0 = -1$ puis $x_0 = 3$

d) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ avec $x_0 = 0$ puis $x_0 = 1$

- On donne $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin(\dfrac{1}{x}) & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que cette fonction est dérivable en 0 et préciser quel est le nombre dérivé en 0.