

Les nombres complexes

A. Origine et tentative de définition

A-I. Préambule

Les résolutions d'équations ont posé des problèmes dès l'antiquité. Pour les grecs, qui avaient imaginé les racines carrées et les fractions, le fait que $\sqrt{2}$ ne semble pas être une fraction a été considéré comme une impossibilité, une « atteinte au divin »... Plus tard, l'introduction des techniques de calcul algébrique (qui sous entendaient l'utilisation -et du coup, l'existence- de nombres négatifs, créa de nouvelles difficultés conceptuelles dont certains ne se remirent jamais. Au 17^{ème} siècle encore, en parlant des solutions d'une équation, on voit apparaître les qualificatifs de « vraies » pour les solutions positives, de « fausses » pour les solutions négatives et d' « imaginaires » pour les solutions dont le carré serait négatif.

Après bien des efforts, la notion de nombre complexe émergea définitivement au 19^{ème} siècle et aujourd'hui ils sont utilisés systématiquement, avec une construction plus ou moins axiomatique, plus ou moins intuitive, suivant les goûts... et les besoins !

Le fameux nombre i dont le carré vaut -1 sert énormément en particulier en électricité... or la lettre i représente déjà l'intensité du courant électrique :
pour éviter les confusions, nous noterons toujours j (et non pas i comme au lycée) ce nombre complexe de carré -1.

A-II. La définition la plus rudimentaire

On admet l'existence d'un nombre j de carré -1 et on appelle nombre complexe, tout « nombre » de la forme $a + jb$ où a et b sont des réels. On admet aussi que toutes les techniques usuelles de calcul restent valables avec ces nombres complexes.

L'ensemble des nombres complexes est noté \mathbb{C} , les opérations dans \mathbb{C} sont notées comme dans \mathbb{R} .

A-III. Définition par les couples de réels

On appelle nombre complexe tout couple de réels.

On définit l'addition par $(a;b) + (c;d) = (a+c;b+d)$

On définit la multiplication par $(a;b) \times (c;d) = (ac - bd; ad + bc)$

... les propriétés des opérations sont alors démontrables, on n'a plus besoin de les admettre.

On simplifie alors la notation en remarquant que $(a;b) = (a;0) + (b;0) \times (0;1)$ ce qui suggère de décider que $(a;0)$ se note a (donc évidemment que $(b;0)$ se note b) et que $(0;1)$ qui semble un peu « à part » se note j . Ce choix de notation étant fait, l'écriture $(a;0) + (b;0) \times (0;1)$ se transforme en $a + bj$.

B. Vocabulaire et propriétés élémentaires

B-I. Module, partie réelle, partie imaginaire

Si z est le complexe $a + bj$:

- a est appelé « partie réelle de z » et est noté $\Re(z)$.
- b est appelé « partie imaginaire de z » et est noté $\Im(z)$.
- $\sqrt{a^2 + b^2}$ est appelé « module de z » et est noté $|z|$.
- le complexe $a - bj$ est appelé conjugué de z et est noté \bar{z} .

B-II. Propriétés algébriques

Par définition (quelle que soit la définition choisie) on a :

- $j^2 = -1 ; j^3 = -j ; j^4 = 1 ; j^5 = j ; \dots$
- $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) ; \Im(z) = \frac{1}{2j}(z - \bar{z}) ; |z|^2 = z\bar{z}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} ; z \in j\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$
- Pour tous z et z' de \mathbb{C} on a :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \text{ et } \overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$$

On déduit aisément de ces propriétés que le conjugué de l'inverse d'un complexe non-nul est l'inverse du conjugué de ce complexe et que le conjugué de la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un complexe non-nul est la puissance $n^{\text{ième}}$ du conjugué de ce complexe.

- Si z est le complexe non-nul $a + bj$, alors l'égalité $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$ donne $\frac{1}{z} = \frac{a - bj}{a^2 + b^2}$ c'est à dire :

$$\Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a}{a^2 + b^2} \text{ et } \Im\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

C. Représentations géométriques des complexes

C-I. Image ponctuelle, image vectorielle

L'une des définitions des nombres complexes utilise les couples de réels, il est donc raisonnable pour les représenter d'utiliser un repère du plan de façon à disposer de deux coordonnées...

On choisit donc un repère orthonormé du plan, disons $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et on assimile le complexe $a + jb$ au couple de coordonnées $(a; b)$. Dans ces conditions, la droite de repère (O, \vec{e}_1) est appelée « axe réel » et celle de repère (O, \vec{e}_2) est appelée « axe imaginaire ».

Le plan muni du repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est appelé « plan complexe » et dans ce plan complexe,

- le point de coordonnées $(a; b)$ est appelé « image ponctuelle de $a + jb$ » et $a + jb$ est appelé « affixe » de ce point.
- le vecteur de coordonnées $(a; b)$ est appelé « image vectorielle de $a + jb$ » et $a + jb$ est appelé « affixe » de ce vecteur.

Remarques :

Un complexe et son conjugué sont représentés symétriquement par rapport à l'axe des abscisses

L'addition des complexes correspond à l'addition des vecteurs.

Les images ponctuelles ou vectorielles ne permettent pas une interprétation simple de la multiplication des complexes...

C-II. Homothéties, translations et nombres complexes

Si Φ désigne une figure dans le plan complexe, formée de points M d'affixe z ,

- on obtient l'image de Φ pour l'homothétie de centre O et de rapport k (non-nul) en multipliant l'affixe z de chaque point de Φ par le réel k
- on obtient l'image de Φ pour la translation de vecteur $\vec{v} = a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2$ en ajoutant à l'affixe z de chaque point de Φ le complexe $a + jb$.

D. Expression trigonométrique, expression polaire

D-I. Argument d'un complexe : notation trigonométrique

Le plan complexe étant muni du repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, la position d'un point M dans ce plan peut être donnée par ses coordonnées cartésiennes ou par ses coordonnées polaires c'est à dire la distance OM et, lorsque cette distance est non-nulle, l'angle orienté du vecteur \vec{e}_1 au vecteur \vec{OM} .

Si z désigne l'affixe de M , la distance OM est $|z|$ et l'angle de \vec{e}_1 au vecteur \vec{OM} est appelé ARGUMENT de z ... et on n'oubliera pas qu'un angle orienté a une infinité de mesures.

Remarques importantes :

- Si $|z|=0$, l'angle orienté du vecteur \vec{e}_1 au vecteur \vec{OM} n'est pas défini : le complexe nul n'a pas d'argument.
- Lorsque $z \neq 0$, l'argument de z est défini et, comme c'est un angle orienté, il a une infinité de mesures... dont une seule dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ que l'on note $\text{Arg}(z)$.
- Si $z = a + bj$ n'est pas le complexe nul, le module r et l'argument θ de z sont tels que :

$$\begin{cases} |z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

- Réciproquement, si z a pour module r et pour argument θ les parties réelles et imaginaires de z sont telles que :

$$\begin{cases} \Re(z) = r \cdot \cos(\theta) \\ \Im(z) = r \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

Conclusion : Tout complexe z non-nul de la forme $z = a + bj$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $z = r \cdot (\cos(\theta) + j \sin(\theta))$ où $r > 0$ et $\theta \in [-\pi; \pi[$. Cette écriture est appelée écriture trigonométrique de z .

Les calculettes actuelles (même les Ti30 ou Ti40...) disposent toutes des conversions automatiques $(a; b) \rightarrow (r; \theta)$ et $(r; \theta) \rightarrow (a; b)$: il est utile de savoir s'en servir.

D-II. Notation polaire (ou d'Euler)

Si on définit une application Φ de \mathbb{R} vers \mathbb{C} en posant $\Phi(\alpha) = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$ on obtient une fonction dont les propriétés font nettement penser à celles des puissances :

$$\Phi(\alpha + \beta) = \Phi(\alpha) \cdot \Phi(\beta) \quad \text{et} \quad \Phi(-\alpha) = \frac{1}{\Phi(\alpha)}$$

L'idée d'Euler est alors de choisir une notation commode qui prenne en compte ces deux propriétés...

Notation : On décide de noter $e^{j\alpha}$ le complexe $\cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$: $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$.

L'écriture trigonométrique devient alors $z = r \cdot e^{j\alpha}$ où r est le module de z et α l'argument... On appelle **notation polaire** cette nouvelle notation.

Cas particuliers fondamentaux :

$\alpha = 0$ donne $e^{j \cdot 0} = 1$	$\alpha = \frac{\pi}{2}$ donne $e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} = j$
--	--

$\alpha = \pi$ donne $e^{j\cdot\pi} = -1$	$\alpha = -\frac{\pi}{2}$ donne $e^{j\cdot(-\frac{\pi}{2})} = -j$
---	---

Généralisation : Si $z = a + bj$, on décide que $e^{a+jb} = e^a \cdot e^{jb}$ c'est à dire :
 $e^z = e^a \cdot (\cos(b) + j \cdot \sin(b))$

Conséquences :

1. Si α est un réel quelconque, $e^{j\alpha}$ est toujours un complexe de module 1 : il ne peut jamais être nul.
2. Si z est un complexe quelconque, le module de e^z est toujours $e^{\Re(z)}$... et comme une exponentielle n'est jamais nulle, e^z ne peut jamais être nul.
3. Tout nombre complexe de module ρ et d'argument α peut s'écrire $\rho \cdot e^{j\alpha}$... si ρ est non-nul, α est défini à 2π près et si ρ est nul, α est quelconque.
4. Si z est un complexe écrit sous la forme $\lambda \cdot e^{j\theta}$ où λ et θ sont des réels quelconques, il n'est pas certain que λ soit le module de z ... parce que λ n'est peut-être pas positif ! Par exemple, si $z = -2 \cdot e^{j\frac{\pi}{6}}$ il est clair que le module de z n'est pas -2 et que, par conséquent son argument ne peut pas être $\frac{\pi}{6}$. En fait, dans ce cas on rectifie le signe en utilisant $e^{j\cdot\pi} = -1$ et on obtient $z = +2 \cdot e^{j\pi} \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} = 2 \cdot e^{j\frac{7\pi}{6}}$ où le module est 2 et l'argument $\frac{7\pi}{6}$.
5. Quels que soient les complexes z et z' , on a toujours :

$e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$	$e^{-z} = \frac{1}{e^z}$	$(e^z)^n = e^{nz}$
-------------------------------	--------------------------	--------------------

E. Applications classiques, exercices typiques.

E-I. Formules d'Euler

Quel que soit le réel α on a $\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{j(-\alpha)}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{j(-\alpha)}}{2j}$.

Ces formules permettent de linéariser les puissances... c'est à dire d'exprimer $\cos^n(\alpha)$ et $\sin^n(\alpha)$ en fonction de $\cos(k\alpha)$ et $\sin(k\alpha)$ où $k \in \{0..n\}$.

Exemple : Linéarisation de $\sin^4(\alpha)$

$$\begin{aligned} \sin^4(\alpha) &= \left(\frac{e^{j\alpha} - e^{j(-\alpha)}}{2j} \right)^4 = \left(\frac{1}{2j} \right)^4 \cdot (e^{j4\alpha} - 4e^{j2\alpha} + 6e^{j0} - 4e^{-j2\alpha} + e^{j4\alpha}) \\ &= \frac{1}{16} \cdot (2\cos(4\alpha) - 8\cos(2\alpha) + 6) \\ &= \frac{1}{8}\cos(4\alpha) - \frac{1}{2}\cos(2\alpha) + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

E-II. Formule de Moivre

Quel que soit le réel α et l'entier n on a $(e^{j\alpha})^n = e^{jn\alpha}$ c'est à dire :

$$\boxed{(\cos(\alpha) + j.\sin(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + j.\sin(n\alpha)}$$

Cette formule permet de faire «quasiment tout le contraire» des formules d'Euler, c'est à dire d'exprimer $\cos(n\alpha)$ et $\sin(n\alpha)$ en fonction de $\cos^k(\alpha)$ et $\sin^k(\alpha)$ où $k \in \{0..n\}$.

Exemple : Expression de $\sin(3\alpha)$

On sait que $\sin(3\alpha)$ est la partie imaginaire de $\cos(3\alpha) + j.\sin(3\alpha)$, donc...

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) &= \Im m \left[(\cos(\alpha) + j.\sin(\alpha))^3 \right] \\ &= \Im m \left[\cos^3(\alpha) + 3j \cos^2(\alpha).\sin(\alpha) + 3j^2 \cos(\alpha).\sin^2(\alpha) + j^3.\sin^3(\alpha) \right] \\ &= 3\cos^2(\alpha).\sin(\alpha) - \sin^3(\alpha) \end{aligned}$$

E-III. Racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité

Soit à résoudre l'équation $z^n = 1$. Si on écrit z sous la forme $\rho.e^{j\alpha}$ avec $\rho \geq 0$ l'équation

devient $\rho^n . e^{jn\alpha} = 1 . e^{j0}$ ce qui revient à $\begin{cases} \rho^n = 1 \\ n\alpha = 0 + k.2\pi \end{cases} \dots \text{d'où} \begin{cases} \rho = 1 \\ \alpha = k. \frac{2\pi}{n} \end{cases}$.

On obtient donc n solutions, toutes de module 1, représentées par les sommets d'un polygone régulier à n sommets, inscrit dans le cercle trigonométrique.

E-IV. Racines $n^{\text{ième}}$ d'un complexe non-nul

Soit à résoudre l'équation $z^n = z_0$. Si on écrit z sous la forme $\rho.e^{j\alpha}$ avec $\rho \geq 0$ et z_0 sous la

forme $\rho_0.e^{j\alpha_0}$ avec $\rho \geq 0$ l'équation devient $\rho^n . e^{jn\alpha} = \rho_0 . e^{j\alpha_0}$ ce qui revient à $\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{\rho_0} \\ \alpha = \frac{\alpha_0 + k.2\pi}{n} \dots \text{et} \end{cases}$

on obtient donc encore n solutions, toutes de module $\sqrt[n]{\rho_0}$, représentées par les sommets d'un polygone régulier à n sommets, inscrit dans le de centre O et de rayon $\sqrt[n]{\rho_0}$.

On peut noter en particulier que tout nombre complexe non-nul est le carré de deux complexes opposés... et que par conséquent le signe « racine » ne peut être utilisé avec les complexes : écrire $\sqrt{-1}$ était une ânerie au collège, c'en est encore une et pour longtemps !

E-V. Equations du second degré dans \mathbb{C}

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont des complexes tels que $a \neq 0$. La factorisation

« canonique » vue en seconde permet d'écrire $a \cdot \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = 0$ et comme $a \neq 0$ les

solutions sont celles de $\left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = 0$.

Si on note δ un complexe quelconque tel que $\delta^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

On retrouve les mêmes formules que pour une inconnue réelle mais il est impossible d'exprimer les solutions avec le signe $\sqrt{\dots}$ puisque ce signe n'est défini (et définissable) que pour les réels positifs.

Exemples :

1 On cherche les complexes z tels que $z^2 = 3 + j$.

Sous forme trigonométrique on ne peut pas dire grand chose car l'argument n'est pas une valeur connue... on utilise alors la méthode algébrique...

$$\text{On résout alors en posant } z = a + jb \text{ donc : } \begin{cases} a^2 + b^2 = \sqrt{10} & (\text{égalité des modules}) \\ a^2 - b^2 = 3 & (\text{égalité des parties réelles}) \\ 2ab = 1 & (\text{égalité des parties imaginaires}) \end{cases} \text{ ce qui}$$

donne :

$$a = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{10}}{2}} \text{ et } b = \sqrt{\frac{-3 + \sqrt{10}}{2}} \text{ ou bien } a = -\sqrt{\frac{3 + \sqrt{10}}{2}} \text{ et } b = -\sqrt{\frac{-3 + \sqrt{10}}{2}}$$

2 Résoudre l'équation $2z^2 - 5z + j = 0$.

On a $\Delta = 25 - 8j$ et on en déduit $\delta = \sqrt{\frac{\sqrt{689} + 25}{2}} - j \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{689} - 25}{2}}$ donc :

$$z_1 = \frac{5 - \left(\sqrt{\frac{\sqrt{689} + 25}{2}} - j \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{689} - 25}{2}} \right)}{4} \text{ et } z_2 = \frac{5 + \left(\sqrt{\frac{\sqrt{689} + 25}{2}} - j \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{689} - 25}{2}} \right)}{4}$$